3.2.1.1 卡尔曼滤波原理

卡尔曼滤波理论以最小均方误差为估计的最佳准则。对所考虑的随机过程提出状态模型，用矩阵方式表示，便于解决多变量的同时估计问题。对于观测数据给出递推估计算法，便于实时处理。它用状态空间形式描述其数学表达式，通过递归求解。其状态的每一次更新估计都由前一次估计结果和新的输入数据得到，只需存储前一次的估计值，因此可以节省内存开销。其基本估算原理如下：

随机过程的状态模型可写为

$$\dot{X} = AX + BU \tag{3.1}$$

$$Y = CX \tag{3.2}$$

式中，X 为状态向量，U 为策动噪声向量。

卡尔曼滤波离散随机过程的状态模型由消息过程、观测过程和估计过程组成。可以写为

(1) 消息模型

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + W_k \tag{3.3}$$

$$Y_k = C_k X_k \tag{3.4}$$

式中，X_k 为 t_k 时刻的状态向量，Φ_k 为零输入情况下 k 时刻到 k+1 时刻的转移矩阵，W_k 为策动噪声向量，定义 $Q_k = E\{W_k\ W_k^T\}$，为策动噪声的协方差矩阵。

(2) 观测模型

$$Z_k = H_k X_k + V_k \tag{3.5}$$

式中，Z_k 为 t_k 时刻的观测向量，H_k 为观测矩阵，代表无测量噪声下观测向量 Z_k 与状态向量 X_k 之间的变换关系，V_k 为测量噪声向量，定义 $R_k = E\{V_k\ V_k^T\}$，为测量噪声的协方差矩阵。

(3) 估计模型

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k(Z_k - H_k\hat{X}_k^-) \tag{3.6}$$

式中 K_k 是卡尔曼增益矩阵，$\hat{X}_k^-$ 是预测估计，代表获得 t_k 时刻的观测值 Z_k 以前所作的关于 X_k 的估计，并定义预测误差为

$$E_k^- = X_k - \hat{X}_k^- \tag{3.7}$$

预测误差的协方差矩阵为 $P_k^- = E\{E_k^-\ E_k^{-T}\}$； $K_k(Z_k - H_k\hat{X}_k^-)$ 为新信息，代表由 t_k 时刻的观测值 z_k 得到的关于 x_k 估计的新信息，定义估计误差为

$$E_k = X_k - \hat{X}_k \tag{3.8}$$

其协方差矩阵为 $P_k = E\{E_k\ E_k^T\}$。估计模型就是利用 t_k 时刻的观测值 Z_k 来纠正预测估计 $\hat{X}_k^-$，从而得到更新估计 $\hat{X}_k$。

由以上定义可得卡尔曼滤波递推方程

$$
\begin{aligned}
&\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k(Z_k - H_k\hat{X}_k^-) \\
&K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
&P_k = (1 - K_k H_k) P_k^- \\
&\hat{X}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{X}_k \\
&P_{k+1}^- = \Phi_k P_k \Phi_k^T + Q_k
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

卡尔曼滤波算法的计算流程框图如图 3.2 所示。

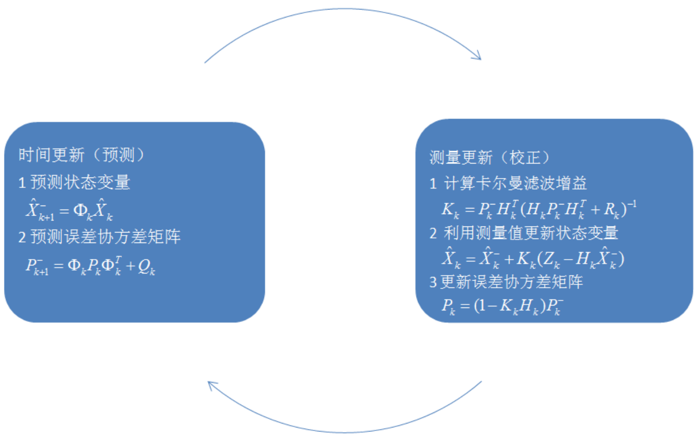

图 3.2 卡尔曼滤波算法的计算流程框图

由式(3.5)可以看到，当卡尔曼滤波观测模型的观测矩阵 H_k 为 1 时，状态变量 X_k 就等于输入向量 Z_k 减去测量噪声向量 V_k，于是此时的卡尔曼滤波估计值就是输入向量 Z_k 的估计值，相当于起到对输入向量 Z_k 的滤波作用。因此，只要将观测模型的观测矩阵 H_k 置 1，算法就可以当作滤波器使用，称之为卡尔曼滤波器。本文中所有信号的滤波工作都由卡尔曼滤波器完成。

当消息模型或观测模型为非线性模型时，需要采用广义卡尔曼滤波算法完成估计。其消息模型和观测模型，以及递推方程可以写为

$$X_{k+1} = f(X_k, W_k) \tag{3.10}$$

$$Z_k = h(X_k, V_k) \tag{3.11}$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k(Z_k - h(\hat{X}_k^-, 0)) \\
&K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \\
&P_k = (1 - K_k H_k) P_k^- \\
&\hat{X}_{k+1}^- = f(\hat{X}_k^-, 0) \\
&P_{k+1}^- = \Phi_k P_k \Phi_k^T + W_k Q_k W_k^T
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Phi_{[i,j]}(k) &= \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{X}(k-1),0) \\
V_{[i,j]}(k) &= \frac{\partial f_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\hat{X}(k-1),0) \\
H(k) &= \frac{\partial z}{\partial x_{[j]}}(\hat{X}(k-1),0) \\
W(k) &= \frac{dz}{dw_{[j]}}(\hat{X}(k-1),0)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

广义卡尔曼滤波算法的计算流程图如图 3.3 所示。

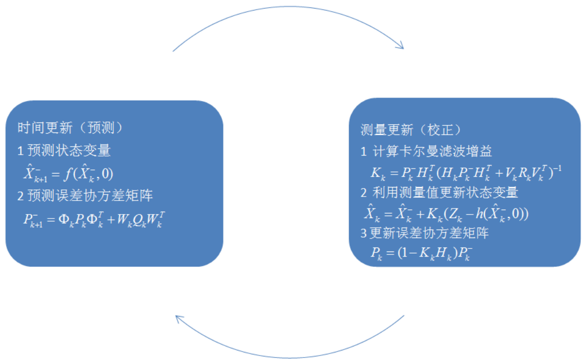

图 3.3 广义卡尔曼滤波算法的计算流程框图

卡尔曼滤波算法以最小均方差为估计的最佳准则，用状态空间概念描述所考虑的随机过程，对观测数据提出递推估计算法，可以估计多个状态变量并达到实时滤波作用。但是，传统卡尔曼滤波算法受到模型精度、初始值的影响较大，容易出现发散现象。而广义卡尔曼滤波算法又是针对非线性模型，其估计精度和收敛速度更加依赖模型精度，而且计算量比传统卡尔曼滤波算法增加很多。为了提高算法的稳定性和收敛速度，本文给出渐消卡尔曼滤波算法，即带有渐消因子的卡尔曼滤波算法，并采用线性消息模型和观测模型。在不增加计算量的同时，提高算法收敛速度。其递推方程为

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_k &= \hat{X}_k^{-} + K_k(Z_k - H_k \hat{X}_k^{-}) \\
K_k &= P_k^{-} H_k^T (H_k P_k^{-} H_k^T + R_k)^{-1} \\
P_k &= (1 - K_k H_k) P_k^{-} \\
\hat{X}_{k+1}^{-} &= \Phi_k \hat{X}_k \\
P_{k+1}^{-} &= \lambda \Phi_k P_k \Phi_k^T + Q_k
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

式中，λ 为渐消因子，且 $\lambda \geq 1$。