



高等学校统编教材

捷联式惯性导航系统

张树侠 孙 静 编著

国防工业出版社

UDC 62-12

0666.12

乙 = 4

361666

捷联式惯性导航系统

张树侠 孙 静 编著



国防工业出版社

(京)新登字106号

内 容 简 介

捷联式惯性导航系统是在传统的稳定平台式惯性导航系统的基础上发展起来的一种新技术，是惯性技术的发展方向，已被广泛应用于国防及国民经济的许多领域。为适应更新教学内容和满足有关科技人员工作的需要，我们编著了本教材。内容包括：捷联式惯性导航系统的基本工作原理、捷联矩阵的即时修正、初始对准、冗余技术及系统误差分析与仿真。

本书可作为高等院校惯性技术专业的教材，也可供相关专业高年级学生、研究生及有关科技人员参阅。

DV10/23

捷联式惯性导航系统

张树侠 孙 静 编著

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092毫米 16开本 印张10¹/₄ 234千字

1992年10月第一版 1992年10月第一次印刷印数：(0001— 180册)

ISBN 7-118-00993-8/U·86 定价：2.70元

出版说明

根据国务院国发(1978)23号文件批转试行的《关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定》，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是做好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986—1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前 言

本书系根据 1987 年 1 月全国高校船舶类惯性导航及仪器专业统编教材会议通过的“捷联式惯性导航系统”教学大纲编写的，供高等院校惯性导航专业、仪器专业及相关专业使用。讲授约 36~54 学时。

捷联式惯性导航系统是把惯性传感器（陀螺仪和加速度计）直接安装在运载体上（不再需要带有常平架的稳定平台），利用惯性传感器、基准方向及最初的位置信息来确定运载体的方位、位置和速度的自主式船位推算导航系统。

捷联技术是近年来惯性技术的一个重要发展方向。惯性技术是利用惯性原理或者其他有关原理，自主地测量和控制物体角运动及线运动参数的工程技术。它是惯性导航、惯性制导、惯性测量和惯性传感器技术的总称。核潜艇靠惯性导航能自主地（不依赖外界）、准确地提供舰位、航速及姿态信息，以保证行动的隐蔽性、航行的安全性和攻击的准确性。现代军用飞机不但靠机载惯性导航提供位置及姿态等导航信息，还用它与机上雷达及火炮系统交联，组成攻击系统，能准确地打击目标。惯性技术还广泛应用于鱼雷制导、火炮控制以及坦克炮塔、自行火炮、雷达天线及水声基阵、轰炸机尾炮塔等的稳定，并逐步推广到石油开发、大地测量、海洋调查、地质钻探和铁路等领域，因此惯性技术在国防现代化方面占有十分重要地位，在国民经济各领域中也日益显示它的巨大作用。

捷联式惯性导航技术是一门新兴的多学科的综合技术，我们在编写本教材过程中力求做到打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学的要求，认真结合近年来的科研与教学实践，比较全面、系统的把捷联式惯性导航的原理、初始对准、冗余技术及系统误差分析等有关内容介绍给读者。

本书共分六章，第一章介绍了惯性导航系统的基本工作原理；第二章、第三章分别讨论了捷联式惯性导航系统的机械编排及捷联矩阵的即时修正与算法误差；第四章至第六章分别讲述了捷联式惯性导航系统的初始对准、冗余技术、系统误差及数字仿真等内容。

本书第六章由孙静编写，其余各章均由张树侠编写。哈尔滨工业大学田自耘副教授负责主审，对书稿提出了许多宝贵的意见和建议；哈尔滨船舶工程学院罗超教授、黄德鸣教授在研究、决定本书编写大纲及内容方面提出了许多好的建议；本书在编写过程中还得到了中国船舶工业总公司教材编审室部分同志的指导和帮助，这里一并致第。

由于我们水平有限，书中一定会有一些缺点与错误，诚恳地期望各方面读者给以批评指正。

编 者

目 录

第一章 惯性导航系统的基本工作原理	1
§ 1.1 惯性导航系统的基本原理	1
§ 1.2 常用坐标系以及垂线和纬度定义	3
§ 1.3 惯性导航系统的基本方程	6
§ 1.4 捷联式惯性导航系统的基本概念	12
§ 1.5 舰船位置和姿态角的确定	14
第二章 捷联式惯性导航系统机械编排	19
§ 2.1 惯性坐标系的捷联式惯性导航系统	19
§ 2.2 游动自由方位坐标系的捷联式惯性导航系统	25
§ 2.3 自由方位坐标系的捷联式惯性导航系统	36
§ 2.4 地理坐标系的捷联式惯性导航系统	37
§ 2.5 用新型陀螺仪的捷联式惯性导航系统	40
第三章 捷联矩阵的即时修正与算法误差	48
§ 3.1 捷联矩阵算法的数学基础	48
§ 3.2 捷联矩阵的即时修正算法	59
§ 3.3 捷联矩阵的算法误差分析	67
§ 3.4 捷联矩阵的最佳正交性分析	75
§ 3.5 变换四元数的最佳归一化分析	78
第四章 捷联式惯性导航系统的初始对准	81
§ 4.1 惯性导航系统初始对准的一般要求和原理	81
§ 4.2 捷联式惯性导航系统的粗对准技术	88
§ 4.3 捷联式惯性导航系统的精对准技术	92
§ 4.4 捷联式惯性导航系统初始对准的参数优化设计	104
第五章 捷联式惯性导航系统的冗余技术	107
§ 5.1 冗余技术的模型化	107
§ 5.2 惯性敏感器冗余系统的最佳配置	113
§ 5.3 冗余度的故障检测与隔离	118
第六章 捷联式惯性导航系统的误差分析	126
§ 6.1 系统误差的分类	126
§ 6.2 捷联式惯性导航系统中的惯性敏感器误差	126
§ 6.3 捷联式惯性导航系统的误差分析	134
§ 6.4 捷联式惯性导航系统的尺寸效应	154
参考文献	158

第一章 惯性导航系统的基本工作原理

本章简要介绍惯性导航系统的基本工作原理，并将捷联式惯性导航系统和稳定平台式惯性导航系统进行对比，以便使读者在学习捷联式惯性导航系统之前就对它有一个初步的了解。

§ 1.1 惯性导航系统的基本原理

什么是惯性导航系统？

惯性导航系统是利用惯性传感器、基准方向及最初的位置信息来确定运载体的方位、位置和速度的自主式航位推算导航系统，有时简称惯导。它至少应由一个惯性测量装置、一个数字计算机和一个控制显示装置及一个专用精密电源所组成。

惯性导航系统又可以分平台式惯性导航系统和捷联式惯性导航系统两大类，前者是将陀螺仪和加速度计安装在一个稳定平台上，以平台坐标系为基准测量运载体运动参数的惯性导航系统；后者是将惯性传感器（陀螺和加速度计）直接安装在运载体上，不再需要稳定平台和常平架系统的惯性导航系统。它们的原理方块图分别如图 1-1-1 和图 1-1-2 所示。

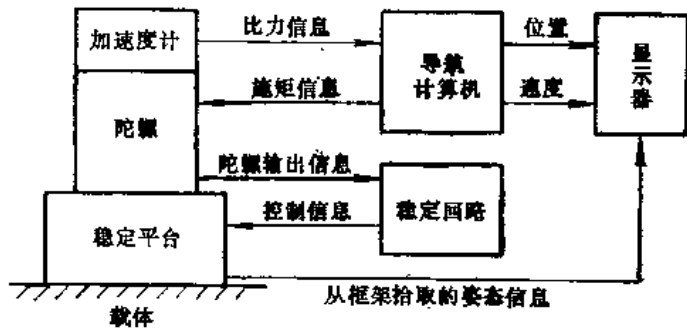


图 1-1-1 平台式惯性导航系统原理方块图

惯性测量装置可以是捷联式的，也可以是框架式的，但不管惯性测量装置的结构和程序编排怎么不同，其导航计算都可以认为是以实现相对选定的空间基准稳定为目标的。

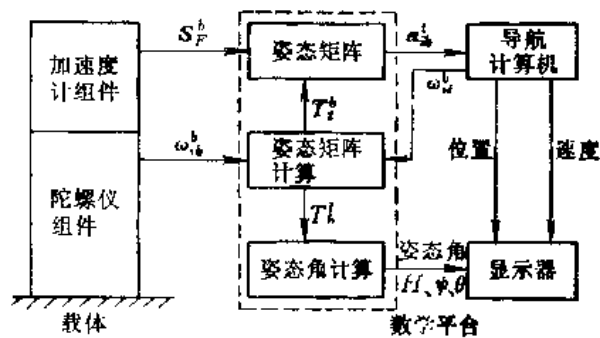


图 1-1-2 捷联式惯性导航系统原理方块图

我们可以将惯性测量装置看成是一个“黑箱”，它的输入量为来自外部环境的比力、角速率；输出量为位置、速度以及运载体相对当地地理坐标系的首向角和水平姿态角。

“捷联”(strapdown)这一术语的英文原意就是“捆绑”的意思，因此所谓捷联系统就是将惯性测量装置的敏感器(陀螺仪与加速度计)直接捆绑在运载体上，从而可实现运动对象的自主导航目的。

“导航”已成为当今世界引人注目的问题，特别是舰船导航它直接关系到舰船航行的安全性和经济性，所以世界上发达的国家都努力开发导航技术的新领域。

惯性导航是一种自主式的导航方法。为了判断舰船与其目标的相对位置，惯性导航系统是通过精确测量载体的旋转运动角速率和直线运动加速度信息，然后送至数字计算机中依赖于数学积分技术进行计算，得出导航数据。它完全是依靠载体自身设备独立自主地进行导航，它与外界不发生任何光、声、磁、电的联系，从而实现了与外界条件隔绝的假想的“封闭”空间内实现精确导航，所以它具有隐蔽性好，工作不受气象条件和人为的外界干扰等一系列的优点。这些优点对于以军事目的而航行的各种舰船来讲，显得特别重要。惯性导航在舰船导航技术中占有突出的地位。近几年来，由于捷联技术在惯性导航系统中的应用为惯性导航系统在民用领域中的应用和发展开辟了更广阔的前景，例如广泛应用于地震、地籍、河流、油田的测量以及摄影、绘图和重力测量等方面。

惯性导航系统作为一个自主的空间基准保持系统，从原理上讲，各种类型的惯性导航系统都可以用几何学的观点来解释，它应由以下两个分系统所组成。

(1) 指示当地地垂线方向的分系统。它是通过测定舰船所在地方的重力方向，再对重力偏差角进行修正，以获取大地参考椭球上该点的位置。

(2) 保持惯性空间基准的分系统。它是通过指示地球自转轴的方向，来确定地心惯性坐标系。

有了地球自转轴方向和当地地垂线方向之间的几何关系，即可以确定舰船导航所需要的经纬度值。在惯性导航系统中，用加速度计测量当地地垂线的方向，用陀螺仪测量地球自转轴的方向。把所测到的这些参数连同事先给出的时间、引力场、初始位置和初始速度一起送入导航计算机，即可实时计算出载体相对所选择的导航参考坐标系的位置。所以说，两个惯性敏感器（陀螺仪和加速度计）是惯性导航系统中的核心部分。

从物理意义上来解释，惯性导航是一门信息科学，也可以说它是一个信息处理系统。根据牛顿惯性定律，当载体相对惯性空间以加速度 a 运动时，可以用载体中的加速度计测出作用在单位质量上惯性力和引力的矢量和的大小，即比力的大小。

$$mS_f = ma - mg \quad (1-1-1)$$

式中 S_f ——加速度计检测质量受到的比力；

m ——感受加速度的检测质量；

a ——载体的运动加速度；

g ——地球的引力加速度。

式(1-1-1)表明，通过载体上加速度计测出比力后，在载体内部不必依赖外界信息而只是通过惯性元件即可测得载体相对惯性坐标系的加速度。当知道了载体的初始位置和初始速度后，只要对该加速度进行两次积分便可以分别先后获取该载体定位所需要的速度和位置信息。现以简单的平面导航为例来说明惯性导航系统的基本工作原理，见图1-1-3所示。

惯性导航系统的基本原理是很简单的，早在300多年前就提出来了，但是差不多经过了3个世纪才出现了实际应用的惯性导航系统，这里主要原因是因为具体实现上存在着许多技术难题，诸如，系统造价昂贵、设计复杂、制造困难以及维修使用人员难于培训，所以应用面较窄。若要推广应用，首先要降低造价并使用方便可靠。从图1-1-3可以看

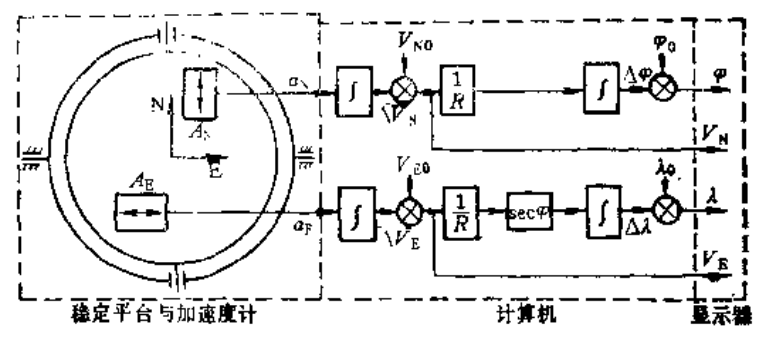


图1-1-3 惯性导航系统基本工作原理图

出，首先要建立一个进行比力测量的导航参考坐标系，其次应精确测量在所选取的导航坐标系中的比力分量，并在测得的比力分量中将惯性加速度分离出来；最后再把分离出来的惯性加速度实时进行两次积分。

以上分析只是说明惯性导航系统的工作原理。这里假设运载体仅作最简单的平面运动，它要求两个加速度计的输入轴应严格对准导航参考坐标系的两根轴。实际上，工程应用的惯性导航系统要比所述的原理复杂得多。

§ 1.2 常用坐标系以及垂线和纬度定义

人们都知道，讨论一个物体相对于另一个物体运动，确定其位置时必须具有与两个物体相固连的参考坐标系。在地球表面附近运动的载体不论是飞机、舰船，还是车辆，最重要的是要知道它们相对地球的地理位置和相对于地理坐标系的首向及水平姿态角，因此必须在运动物体上获得一个地理坐标系或一个惯性坐标系。陀螺仪最重要的功用之一就是用在运载体上模拟地理坐标系或惯性坐标系。在惯性技术领域常用的坐标系有以下几种。

一、各种坐标系的定义

1. 地心惯性坐标系—— $O_e X_i Y_i Z_i$

我们把在空中静止或匀速直线运动的参考坐标系称为惯性参考坐标系；把坐标系原点取在地球地心 O_e 时的右手直角惯性坐标系称地心惯性坐标系（简记为 i 系）。

我们所居住的地球是一个椭球体，它除了绕太阳公转外还绕自转轴自转。地球的自转轴在惯性空间的方向变化十分缓慢，可以近似认为其自转轴的方向是不变的。以地心 O_e 为原点作右手坐标系 $O_e X_i Y_i Z_i$ ， OZ_i 轴沿地轴指地球的北极， OX_i 、 OY_i 在地球赤道平面内与地轴 $O_e Z_i$ 垂直并不随地球自转，因此 $O_e Z_i$ 、 $O_e X_i$ 、 $O_e Y_i$ 均指向惯性空间某一方向不变。我们可以近似地把坐标系 $O_e X_i Y_i Z_i$ 看成一个惯性坐标系并称之为地心惯性坐标系，如图 1-2-1 所示。事实上，宇宙空间中的万物都处于运动之中，想要寻找绝对的惯性坐标系显然是不可能的，我们只能根据运载体导航的需要来选择惯性坐标系，对于在地球表面附近运动的舰船导航来讲，选取地心惯性坐标系是合适的。

2. 地球坐标系—— $O_g X_g Y_g Z_g$

地球坐标系是原点位于地心、与地球固联,其中一轴与极轴重合的右手直角坐标系。它相对惯性坐标系以地球自转角速率 ω_{ie} 旋转, $\omega_{ie}=15.041088^\circ/\text{h}$ 。地球坐标系中 $O_e Z_e$ 与 $O_i Z_i$ 重合, $O_e X_e, Y_e, Z_e$ 在赤道平面内, $O_e X_e$ 轴指向格林尼治经线, $O_e Y_e$ 轴指向东经 90° 方向,见图1-2-1所示。通常也有将 ω_{ie} 用大写字母 Ω 表示。

3. 地理坐标系—— $O X_t, Y_t, Z_t$

地理坐标系是原点位于运载体所在的地球表面,其中一轴与地理垂线重合的右手直角坐标系。对于研究舰船导航来讲,地理坐标系的原点 O 选取在舰船重心处, $O X_t$ 指东、 $O Y_t$ 指北、 $O Z_t$ 沿垂线方向指天,通常称东北天坐标系。对于地理坐标系的坐标轴还有不同的取法,如北西天、北东地等。坐标轴指向不同仅仅影响某一矢量在坐标系中求取投影分量的正负号有所不同,而不影响研究舰船导航基本原理的阐述和导航参数计算结果的正确性。 $O Z_t$ 轴与赤道平面间的夹角 φ 即为当地纬度。地理坐标系是研究舰船导航的一个重要坐标系,如图1-2-1所示,通常简记为 t 系。由于地球的椭圆度为 $1/297$,而图1-2-1中近似地画为圆球。

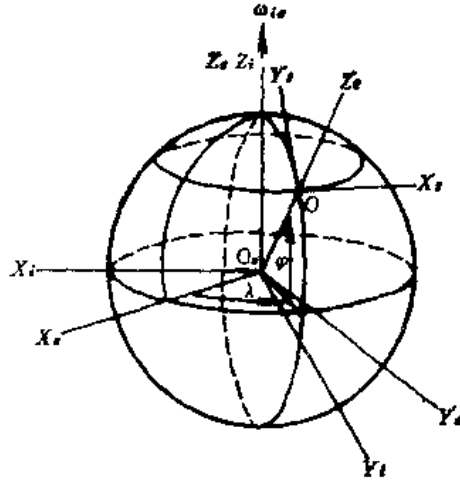


图1-2-1 坐标系示意图

4. 动参考坐标系—— $O X_m, Y_m, Z_m$

动参考坐标系是原点随运载体运动,三个轴的指向分别平行于某个空间坐标系的各相应轴的坐标系。例如当把动参考坐标选取得与地理坐标系相重合时,可将这种导航坐标系构成的系统称为指北方位系统;若将 $O Z_m$ 轴仍然选得与 $O Z_t$ 重合,而使 $O X_m$ 与 $O X_t$ 及 $O Y_m$ 与 $O Y_t$ 之间相差一个自由方位角或游动方位角 α ,那么这种动参考坐标系构成的系统称为自由方位系统或游动自由方位系统。

5. 平台坐标系—— $O X_p, Y_p, Z_p$

与平台台体固连的右手直角坐标 $O X_p, Y_p, Z_p$ 称为平台坐标系。在平台式惯性导航系统中,惯性敏感器(陀螺仪和加速度计)安装在与舰船角运动相隔离的平台上。对于平台式惯性导航系统,平台坐标系是通过平台台体来实现的;对于捷联式惯性导航系统,平台坐标系是通过存储在计算机中的方向余弦矩阵来实现的,因此又称为数学解析平台。在惯性导航系统中,平台坐标系是用来复现动参考坐标系。平台坐标系的坐标原点 O 位于舰船的重心处,当惯性导航系统不存在误差时,平台坐标系和动参考坐标系相重合;当惯性导航系统出现误差时,平台坐标系就会相对动参考坐标系出现误差角。对于平台式惯性导航系统来讲,其误差角是由于平台台体的加工、装配工艺不完善,惯性敏感器误差以及初始对准误差等因素造成的。而对于捷联式惯性导航系统,二者的误差角则是由于算法误差、计算机舍入误差、惯性敏感器误差及初始对准误差等原因造成的。

6. 舰船坐标系—— $O X_s, Y_s, Z_s$

舰船在航行中由于受风浪的影响,经常出现偏航和纵摇、横摆,为了确定舰船相对当地地理坐标系的角位置(通常称为首向及水平姿态),就需要有与舰船固连的坐标系。舰船坐标系的原点是舰船重心 O ,纵轴 $O Y_s$ 沿舰船首尾线方向并指向舰首,横轴 $O X_s$ 指

向舰船的右舷, OZ_1 轴垂直于舰船的甲板平面, OX_1, Y_1, Z_1 坐标系构成右手直角坐标系。当舰船没有纵摇横摆时, X_1, OY_1 平面即为水平面, OZ_1 轴沿铅垂线指天顶。舰船在航行时受风浪的作用将会在预定航向附近左右偏摆, 这种偏摆称为偏航。我们把预定的航行方向称为航向。在水平面内, 用北向基准线与航向线间的夹角表示航向, 通常该夹角为航向角并以顺时针方向计量, 以 K 表示航向角。舰船坐标系相对于当地地理坐标系所确定的状态可以用姿态角表示。舰船姿态角是舰船纵摇角、横摇角、首向角的统称。

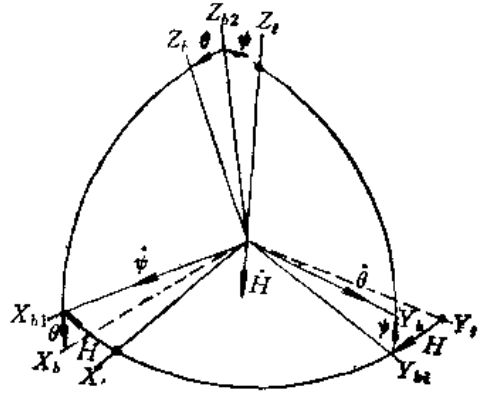


图1-2-2 姿态角坐标变换图

舰船纵轴轴向在水平面内投影方向称为首向, 用北向基准线和首向方向之间的夹角 H 表示首向角, 通常以顺时针方向计量, 舰船纵轴与水平面之间的夹角 ψ 称为纵摇角; 舰船横轴与水平面之间的夹角 θ 称为横摇角。当已知首向角 H 、纵摇角 ψ 、横摇角 θ 的大小时, 则舰船相对当地地理坐标系的角位置完全可以确定, 见图 1-2-2 所示。

二、垂线及纬度定义

在惯性导航系统中, 应用地球表面某点的垂线和纬度是一个十分重要的概念。由于地球是一个不规则的球体, 使得纬度和垂线的定义变得比较复杂, 下面予以简要介绍。

地理纬度: 地球子午圈上某点的法线与地球赤道平面的夹角。通常用作地图或航图上的纬度, 又称测地纬度, 如图 1-2-3 中 φ 所示。它是通过大地测量定出的纬度。

地心纬度: 地球表面一点和地球几何中心的连线与地球赤道平面之间的锐角, 如图 1-2-3 中 φ' 所示。

天文纬度: 重力垂线和赤道平面的夹角, 如图 1-2-3 中 φ'' 所示。它是通过天文方法测定的。

为了定义垂线, 事先要给出大地水准面的概念。我们称由假想的、连续穿过所有陆地地块的平均海平面延伸部分所确定的地球形状为大地水准面。

地理垂线: 大地水准面法线的方向。

地心垂线: 从地心通过观察者所在位置的径向矢量的方向。地心垂线又称几何垂线。

质量引力垂线: 任一等势面的法线方向, 用非旋转地球上的铅垂线方向来表示。

表观垂线: 重力加速度和其他所有加速度合成矢量的方向, 又称动态垂线。

当地垂线: 观测者所在位置的垂线, 可以是铅垂线, 也可以是地理垂线或质量引力垂线。

上述几种纬度定义对于地球表面上某一点来讲实际上是不一样的, 在一般工程技术

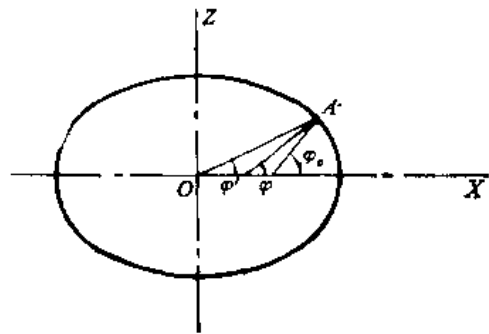


图1-2-3 各种纬度定义示意图

中应用地心纬度定义，但实际上是把地球视为圆球体。由于地球椭球体的表面和大地水准面也不完全吻合，因此天文纬度和测地纬度也不一致，但这二者的偏差很小，一般不超过 30 角秒通常可以忽略。在惯性导航系统中计算出来的结果是测地纬度而不是地心纬度。

§ 1.3 惯性导航系统的基本方程

一、舒勒 (Schuler) 原理

人们将引导运载体在其航线上运动的科学称为导航学，将引导运载体到达预定目的地的过程称为导航。为了确定航向，需要给出一导航基准。在地球表面附近运动的舰船导航基准有两个：一是以地理北极为方向称为真北；二是水平方向，它是与垂线或重力垂直的基准。

在地面上，处于静止状态的铅垂线能够准确地指示当地垂线的方向，但是在运动物体上，水平加速度将使单摆摆动而偏离当地垂线方向。图 1-3-1 表明了单摆在加速度运动中出现的偏差 α_0 。加速度 a 越大，偏差角 α_0 也越大。

建立垂线基准的基本原理是假定从舰船沿非旋转球体的大圆航线运动时的这种简单情况开始。从图 1-3-1 中可以直观的看出，如果单摆相对惯性空间的角加速度 $\ddot{\alpha}_0$ 正好等于物体移动的垂线相对惯性空间的角加速度 $\ddot{\alpha}$ ，那末当起始条件为零并经两次积分，则有 α_0 等于 α ，亦即在运动物体内在线加速度 a 的作用下，单摆的摆线始终跟踪地垂线方向。

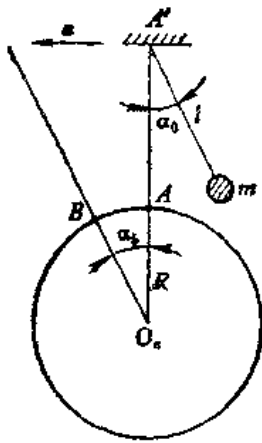


图1-3-1 在加速度作用下的单摆

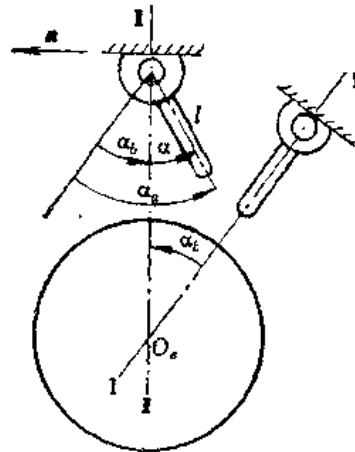


图1-3-2 加速度作用下的物理摆

用物理摆 (即复摆) 来分析舒勒原理更能切合实际。从图 1-3-2 看出，I-I 垂线为舰船起始垂线，舰船未运动时，安装在舰船上的物理摆停在当地垂线方向上，在加速度 a 作用下，经过一段时间，舰船到达 II-II 位置。由于加速度作用，使摆的摆线偏离 I-I 垂线一角度 α ，摆的摆线偏离初始位置 I-I 角度为 α_0 ，而位置 I 和位置 II 的地垂线变化角度值为 α_0 ，不难写出其物理摆运动方程式为：

$$J\ddot{\alpha}_0 = mals\cos\alpha - mgl\sin\alpha \quad (1-3-1)$$

式中 J —— 摆绕支点转动的惯量,
 m —— 摆的质量,
 l —— 摆长, 物理摆的重心到悬挂点的长度。

从图 1-3-2 看出:

$$\alpha_s = \alpha_b + \alpha \quad (1-3-2)$$

角加速度的关系为:

$$\ddot{\alpha}_s = \ddot{\alpha}_b + \ddot{\alpha} \quad (1-3-3)$$

其中

$$\ddot{\alpha}_b = a / R \quad (1-3-4)$$

这里的 R 为地球的半径。

若将式 (1-3-3) 和式 (1-3-4) 代入式 (1-3-1), 并认为 α 是小角度, 则式 (1-3-1) 变为:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J} \alpha = \left(\frac{ml}{J} - \frac{1}{R} \right) a \quad (1-3-5)$$

若适当选择物理摆参数, 使得:

$$\frac{ml}{J} - \frac{1}{R} = 0 \quad (1-3-6)$$

此时, 物理摆的运动就与加速度 a 无关, 即不再受到加速度 a 的干扰, 式 (1-3-6) 也可以写成

$$\frac{ml}{J} = \frac{1}{R} \quad (1-3-7)$$

通常称式 (1-3-7) 为舒勒调谐条件。对于图 1-3-1 所示的单摆 (即数学摆), 由于 $J = ml^2$, 则舒勒调谐条件变为:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} \quad \text{或} \quad l = R \quad (1-3-8)$$

即摆长等于地球的半径。

当满足舒勒调谐条件后, 式 (1-3-5) 可写成

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R} \alpha = 0 \quad (1-3-9)$$

式 (1-3-9) 表示了一个无阻尼振荡运动。

令

$$\omega_s = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

则

$$T_s = 2\pi / \omega_s = 2\pi \sqrt{R/g} \quad (1-3-10)$$

式中 ω_s —— 舒勒振荡角频率;

T_s —— 舒勒振荡周期。

当取地球半径 $R = 6371\text{km}$; $g = 9.8\text{m/s}^2$, 可得到 α 的振荡周期 $T_s = 84.4\text{min}$ 。

当我们把物理摆的 α 角振荡周期通过有关结构参数的调整, 使运载体有加速度时不

引起物理摆系统偏离已经对准的某一垂线，则称该物理摆为舒勒摆。如果将舒勒调谐的物理摆系统固定于一个不转动的地球平均表面上，则这时它将具有 84.4min 的固有振荡周期。

舒勒摆的物理意义在于：当由舰船线加速度 a 引起的地垂线变化的角加速度 $\ddot{\alpha}_b = a/R$ 恰好等于物理摆在线加速度 a 作用下绕其悬挂点运动的角加速度 $m/a/J$ 时，则物理摆对线加速度 a 不敏感。也就是说，若物理摆初始指向地垂线，则不论舰船怎样运动，物理摆的摆线始终指向地垂线；若物理摆初始偏离地垂线 α_0 ，则它就围绕地垂线以舒勒周期 $T = 84.4\text{min}$ 做不衰减的振荡。

将式 (1-3-1) 中 α 看成是小角度，则有

$$\ddot{\alpha}_s = \frac{ml}{J} a - \frac{ml}{J} g\alpha = \frac{ml}{J} (a - g\alpha) \quad (1-3-11)$$

由式 (1-3-10)、式 (1-3-2)、式 (1-3-4) 可以方便地画出物理摆控制方块图如图 1-3-3 所示。

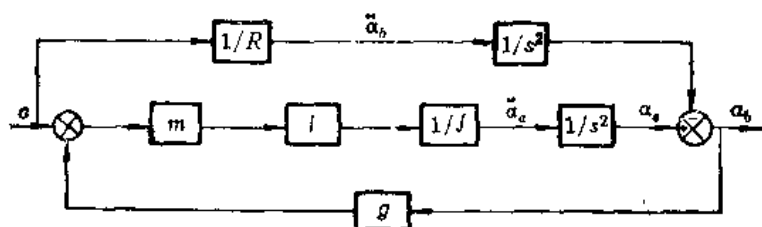


图1-3-3 物理摆控制方块图

若进一步简化可得简化方块图，如图 1-3-4 所示。

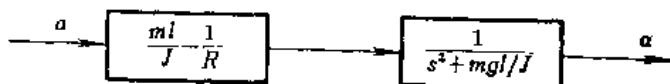


图1-3-4 物理摆的简化方块图

从图 1-3-4 中可以明显地看出，舒勒调谐条件的物理意义在于当物理摆满足舒勒调谐条件后即变成一个与加速度无关而只与初始条件有关的二阶自由振荡系统。

舒勒摆的原理及实现方法对于平台式惯性导航系统比较形象且直观，而对于捷联式惯性导航系统，由于陀螺仪和加速度计都是沿运载体坐标系轴向安装的，数学解析平台的作用要在导航计算机内实现，因此舒勒摆的原理也就全部隐含在导航计算机内的软件之中。

二、动矢量的导数

一个具有大小和方向的物理量称为矢量，例如加速度、角速度、角加速度、动量矩等。一个位置矢量也可以看成是一个径矢，而径矢对时间的导数称为速度。因此任何一个动矢量对时间的导数均应满足速度合成定理。

在图 1-3-5 中，设 $r = \overline{OM}$ 是某一径矢 (r 也可以想象为 a 、 ω 、 M 、 H 等等)， M 为动点，定参考坐标系为 $O_x Y_i Z_i$ ，动参考坐标系为 $O X_m Y_m Z_m$ ，设动参考坐标系沿某一轴（例如 $O Z_m$ ）相对定参考坐标系有一旋转角速度 ω ，动点 M 在定参考坐标系

中的径矢为 R ，动参考坐标系原点 O 在定参考坐标系的径矢为 R_0 。由图 1-3-5 可知，

$$R = R_0 + r$$

将它对时间求导数可得到：

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR_0}{dt} + \omega \times r + \frac{\partial r}{\partial t} \quad (1-3-12)$$

为什么会这样呢？因为这是一个含有相对运动和牵连运动的复合运动问题。而牵连运动又包括 R_0 变化的平动和以 ω 大小的转动两部分。现在我们来分析式 (1-3-12) 中每一项的物理意义。

dR/dt ：指动点 M 在定参考坐标系中的径矢 R 对时间的变化率，因此它是动点 M 的绝对速度。

$\partial r/\partial t$ ：指动点 M 在动参考坐标系中的径矢 r 在动参考坐标中观察到的对时间的变化率，它是动点 M 的相对速度。

dR_0/dt ：指动参考坐标系原点 O 相对定参考坐标系的速度，即是动参考坐标系平动运动的牵连速度。

$\omega \times r$ ：指动参考坐标系相对定参考坐标系转动时，动点 M 在动参考坐标上那一点位置的转动引起的牵连速度。

所以动点 M 的牵连速度为 $dR_0/dt + \omega \times r$ 。若动参考坐标系原点 O 和定参考坐标系原点 O_0 相重合，即 R_0 等于零，则式 (1-3-12) 可以简化为：

$$dR/dt = \omega \times r + \partial r/\partial t \quad (1-3-13)$$

根据以上分析可知，式 (1-3-13) 实际上是速度合成定理的另一种表示方法。这个式子比较抽象，但是科学的抽象能更深刻地反映自然界的规律，这个式子对于我们研究舰船在地球表面的运动和惯性导航系统基本方程都是一个有力的工具。

三、惯性导航系统的基本方程

当我们研究舰船在地球表面运动时，可把舰船看成刚体，为了研究导航的需要，选取一平台坐标系（简记 p 系），其原点取在舰船的重心处，设 R 为平台坐标系的原点在惯性坐标系内的径矢，如图 1-3-5 所示。

通常研究舰船运动的导航问题是要确定舰船相对地球的速度和位置。此时取惯性坐标系为地心惯性坐标系（简记为 i 系）、取地球坐标系作为动参考坐标系（简记为 e 系），这样地球坐标系 $O_e X_e Y_e Z_e$ 相对地心惯性坐标系 $O_i X_i Y_i Z_i$ 的牵连运动角速度为 $\omega_{ie} = \Omega = 15.04088^\circ/h$ 。若在 e 系上求径矢 R 的绝对速度，考虑到 i 系和 e 系原点重合，则式 (1-3-12) 可以改写为：

$$dR/dt_i = dR/dt_e + \Omega \times R \quad (1-3-14)$$

式中 dR/dt_i —— R 在定系（ i 系）的绝对速度，

dR/dt_e —— R 在动系（ e 系）的相对速度。

后者即为平台坐标系（ p 系）坐标原点相对地球坐标系的速度矢量——即地速矢量 V_{pe} ，即

$$dR/dt_e = V_{pe} \quad (1-3-15)$$

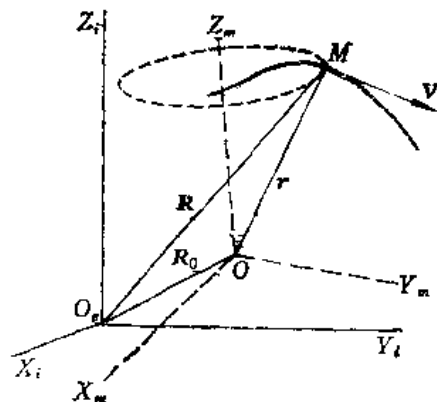


图1-3-5 动矢量示意图

将式 (1-3-15) 代入式 (1-3-14) 后再次求取绝对变化速率, 则可得,

$$d^2\mathbf{R}/dt^2|_i = dV_{ep}/dt|_i + d(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})/dt|_i \quad (1-3-16)$$

由于地球自转角速率可以近似地看为常量, 则

$$d\boldsymbol{\Omega}/dt|_i = 0$$

这样, 式 (1-3-16) 可以改写成:

$$d^2\mathbf{R}/dt^2|_i = dV_{ep}/dt|_i + \boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{R}/dt|_i \quad (1-3-17)$$

将式 (1-3-14)、式 (1-3-15) 代入式 (1-3-17) 后略加整理则有:

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{R}/dt^2|_i &= dV_{ep}/dt|_i + \boldsymbol{\Omega} \times (V_{ep} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \\ &= dV_{ep}/dt|_i + \boldsymbol{\Omega} \times V_{ep} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (1-3-18)$$

对于式 (1-3-18) 中的 $dV_{ep}/dt|_i$ 求导时, 由于 V_{ep} 要在平台坐标系上取投影 (即地速的各分量在平台坐标系上给出的), 因此这次求取绝对速度时应把平台坐标系视为动参考坐标系, 即有:

$$d^2\mathbf{R}_{ep}/dt^2 = dV_{ep}/dt|_p + \boldsymbol{\omega}_{ip} \times V_{ep} \quad (1-3-19)$$

式中

$$\boldsymbol{\omega}_{ip} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{ep} = \boldsymbol{\omega}_{io} + \boldsymbol{\omega}_{ep} \quad (1-3-20)$$

这里的 $\boldsymbol{\omega}_{ip}$ 表示平台坐标系相对地球坐标系的角速度, 它决定于平台坐标系的选取, 将式 (1-3-19)、式 (1-3-20) 代入式 (1-3-18), 可得:

$$d^2\mathbf{R}/dt^2|_i = dV_{ep}/dt|_p + (2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{ep}) \times V_{ep} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (1-3-21)$$

由于平台式惯性导航系统的实现和加速度计有着密切的联系, 所以应研究加速度计运动方程与式(1-3-21)的关系。图 1-3-6 为表明安装在舰船中平台上的加速度计原理示意图。

加速度计中, 把沿着或绕着输入轴的加速度转换为力或力矩的有效质量 m 称为检测质量, 根据牛顿定律有:

$$F = m \cdot d^2\mathbf{R}/dt^2|_i \quad (1-3-22)$$

式中 F ——作用于加速度计中检测质量块上的外力,

$$F = F_s + mg_m \quad (1-3-23)$$

式中 F_s ——作用在质量块上的弹簧约束力;

mg_m ——作用在质量块上的万有引力。

将式 (1-3-23) 代入式 (1-3-22) 略作变化可得:

$$\left. \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right|_i = \frac{F_s}{m} + g_m \quad (1-3-24)$$

式 (1-3-24) 中的 $d^2\mathbf{R}/dt^2|_i$ 为加速度计的检测质量块所承受的绝对加速度, 也即舰船

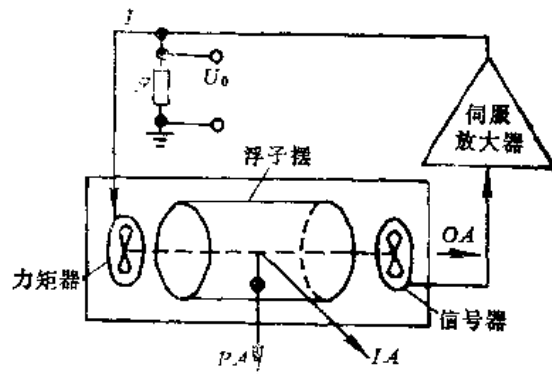


图1-3-6 加速度计原理示意图

或平台坐标系原点的绝对加速度； g_m 为万有引力加速度； F_i/m 为非引力加速度。令 $S_F = F_i/m$ ，它表示单位检测质量块所承受的弹簧约束力。将 S_F 定义为比力，即表示作用在单位检测质量块上惯性力与引力的矢量和。 S_F 的大小与弹簧变形成正比，而加速度计的输出正是与加速度计的约束弹簧变形成正比，所以说惯性导航系统中的加速度计实际上检测的并非是运载体的加速度而是比力 S_F 的大小，这是惯性导航系统理论中最重要的基本概念之一。

将式 (1-3-24) 代入式 (1-3-19)，得：

$$S_F + g_m = dV_{e,p}/dt|_p + (2\Omega + \omega_{e,p}) \times V_{e,p} + \Omega \times (\Omega \times R) \quad (1-3-25)$$

若令 $g = g_m - \Omega \times (\Omega \times R)$ ，并定义 g 为重力加速度，它表明由地球对其表

面或其表面附近的物体施加的引力在地球表面引起的加速度，它的数值随着观察点的纬度和高度而变，国际上已公认北纬 45° 的海平面上的数值 9.80065 m/s^2 为标准重力加速度。用图 1-3-7 进一步讨论一下重力加速度的物理意义，图中给出地球表面上的一个质点 M ，其质量为 m 。它悬挂在一根细线上，这时它受到了细线的拉力 F_i ，质点 M 还受到万有引力 mg_m 。这两个力的作用结果使质点 M 随地球以向心加速度 $\Omega \times (\Omega \times R)$ 运动，即

$$F_i + mg_m = m\Omega \times (\Omega \times R)$$

令 $g = F_i/m$ ，则有：

$$g = g_m - \Omega \times (\Omega \times R) \quad (1-3-26)$$

从图 1-3-7 和式 (1-3-26) 可以看出，重力加速度方向是与该质点所受到的约束力 F_i 相反方向。它还可以看成是地球引力加速度 g_m 与矢量 $\Omega \times (\Omega \times R)$ 的合矢量，地垂线的方向正是沿 g 的方向，而水平而则与 g 垂直。从图 1-3-7 可明显看到， g 与 g_m 之间有一个很小的夹角 $\Delta\theta$ ，显然 $\Delta\theta$ 的大小与地理纬度有关，当 $\varphi = 45^\circ$ 时， $\Delta\theta$ 大约为 $10'$ 。将式 (1-3-26) 代入式 (1-3-25)，则得：

$$\dot{V}_{e,p} = S_F - (2\Omega + \omega_{e,p}) \times V_{e,p} + g \quad (1-3-27)$$

式 (1-3-27) 就是矢量形式的惯性导航系统基本方程。方程中的各项物理意义如下：

$V_{e,p}$ ——为进行导航计算需要获得的舰船相对地球的加速度矢量；

S_F ——加速度计所量测到的比力矢量；

$(2\Omega + \omega_{e,p}) \times V_{e,p}$ ——地球自转和舰船相对地球运动而产生的附加加速度。

由于附加加速度同样会被加速度计中的检测质量块所感受，为了计算 $V_{e,p}$ ，需要从 S_F 中扣除，所以该附加加速度又称为有害加速度。

当然惯性导航系统基本方程也可以写成沿平台坐标系的投影形式。平台系的取法不同，惯性导航系统基本方程沿平台坐标系的具体投影形式也不同。

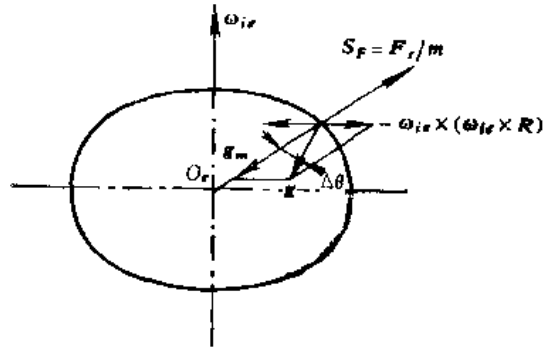


图1-3-7 重力加速度的物理意义

§ 1.4 捷联式惯性导航系统的基本概念

一、捷联式惯性导航系统与平台式惯性导航系统的对比

平台式惯性导航系统虽然已经达到很高水平,但其造价高、维修费用十分昂贵。计算机虽为数字式,但框架伺服系统一般仍采用模拟线路,所以相对来讲,可靠性差一些。就在平台式惯性导航系统迅速发展的同时,捷联式惯性导航系统也处于研制过程中,大约在50年代中期美国首先致力于航天飞行器用的捷联系统方案研究。

捷联式惯性导航系统是将惯性敏感器(陀螺和加速度计)直接安装在运载体上,不再需要稳定平台和常平架系统的惯性导航系统。陀螺仪作为角速率传感器而不是作为角位移传感器,加速度计的输入轴不是保持在已知确定方向上,加速度计测量值是运载体瞬时运动方向的加速度值。通过计算机内的姿态矩阵实时解析计算而得到一个“数学解析平台”,它同样可以起到机电结合的稳定平台所提供的在惯性空间始终保持所要求的姿态作用。

从结构上讲,捷联式惯性导航系统与平台式惯性导航系统的主要区别是,前者没有具体的常平架的稳定平台,后者具有常平架的平台。通常稳定平台上装有陀螺仪和加速度计,其功能是不受运载体运动的影响,而在惯性空间始终保持要求的姿态。这样就可以从稳定平台的常平架轴上的角度传感器量测到运载体的姿态角(对于舰船而言,即为首向角、纵摇角、横摇角),而捷联式惯性导航系统则不具有常平架的平台,它是把惯性敏感器——陀螺仪和加速度计直接安装在舰船载体上,将惯性敏感器输出的量测信息直接送至导航计算机中进行实时的姿态矩阵解算,通过姿态矩阵把惯性导航系统中加速度计测量到的舰船沿船体纵、横向的加速度信息,转换到导航用的动参考坐标系轴向,然后再进行导航计算,并从姿态矩阵的有关元素中提取舰船的姿态角(首向角 H 、纵摇角 ψ 、横摇角 θ)。所以说,在捷联式惯性导航系统中,是由导航计算机来完成具有常平架的稳定平台功能,即用“数学解析平台”取代稳定平台的功能。

图 1-1-1 和图 1-1-2 分别给出了稳定平台式惯性导航系统和捷联式惯性导航系统原理方块图。

从图 1-1-2 看出,惯性敏感器——陀螺仪和加速度计直接固接在舰船上,用速率陀螺仪去直接测量得到舰船坐标系 $O X_b Y_b Z_b$ 相对地心惯性坐标系 $O_e X_i Y_i Z_i$ 的角速度 ω_{ib}^b , 上角标 b 表示该角速度在 b 坐标系上的投影。利用 ω_{ib}^b 进行姿态矩阵 T_{ib}^i 计算。由于姿态矩阵 T_{ib}^i 中的元素是 $O X_b Y_b Z_b$ 相对 $O X_i Y_i Z_i$ 的首向角 H 、纵摇角 ψ 、横摇角 θ 的三角函数构成,所以当求得了姿态矩阵 T_{ib}^i 的即时值,便可进行加速度计信息的坐标变换和提取姿态角 H 、 ψ 、 θ 的大小。这三项功能实际上就代替了平台式惯性导航系统中的稳定平台的功能,这样计算机中的这三项功能也就是所谓的“数学解析平台”;而计算的地理坐标系的角速度信息 ω_{ie}^e , 则就相似于稳定平台上的陀螺施矩信息。

从图 1-1-1 看出,惯性敏感器——陀螺仪和加速度计都是安装在稳定平台上。加速度计输出的量测信息直接送至导航计算机,它除了计算舰船位置、速度外,还要计算对陀螺仪的施矩信息。陀螺仪在施矩信息作用下,通过平台稳定回路控制平台跟踪动参考坐

标系在惯性空间转动，这样舰船的首向角 H 、纵摇角 ψ 、横摇角 θ ，则可以从平台的常平架轴上的角度传感器中直接测得。

从以上对比中可以看出，捷联式惯性导航系统有以下几个主要优点：

(1) 惯性传感器便于安装、维修和更换。

(2) 惯性传感器可以直接给出舰船坐标系轴向的线加速度、线速度、角速度以提供给舰船稳定控制系统和武备控制系统。

(3) 便于将惯性传感器重复布置，从而易在惯性传感器的级别上实现冗余技术，这对提高系统的性能和可靠性十分有利。

(4) 由于去掉了具有常平架的平台，一则消除了稳定平台稳定过程中的各种误差；二则由于不存在机电结合的常平架装置，使整个系统可以做得小而轻，并易于维护。

当然，由于惯性传感器直接固接于船体上也带来新的问题，即导致惯性传感器的工作环境恶化了。由于惯性传感器直接承受舰船的振动、冲击及温度波动等环境条件，惯性传感器的输出信息将会产生严重的动态误差。为保证惯性传感器的参数和性能有很高的稳定性，则要求在系统中必须对惯性传感器采取误差补偿措施。

二、捷联式惯性导航系统的发展前景

从捷联系统的发展过程我们已看到它的优点非常突出，现代捷联式惯性导航系统的特点是有一定的精度，反应时间短、可靠性高、体积小、重量轻，这是因为现代大多数惯性导航系统都使用了高速、大容量的数字计算机和一些新技术，所以许多方面它已有逐渐取代平台式惯性导航系统的趋势。据有关资料报道，美国军用惯性导航系统1984年全部为平台式，到1989年已有一半改为捷联式；战术导弹的惯性制导系统1984年有83%为平台式，而到1989年将下降到34%；战略导航的惯性制导系统1984年有16%为捷联式，到1989年已上升到44%；而民用航空方面1984年有70%为捷联式惯性导航系统，到1989年已上升到90%，而在航海方面，西德利铁夫公司早在1985年就已推出捷联式平台罗经。

有关方面对舰船及微型潜水器所用的导航设备进行分析表明，目前使用的导航设备精度范围，可以从使用陀螺罗经与计程仪的舰位推算技术到复杂的高精度的惯性导航系统都有，然而并不是所有的都要高精度，况且平台式惯性导航系统存在的一个主要缺点是采用常平架系统，它不仅复杂、造价高、体积大、重量重，而且在发生故障情况下维修也比较麻烦，所以将精度适中、成本较低的惯性传感器直接安装在吨位较小或微型潜水器上，采用高速、大容量的计算机取代机电结构的常平架系统具有一系列诱人的优点。特别是由于舰船和微型潜水器具有加速度不大、姿态变化范围不如宇宙飞行器剧烈、使用的环境条件也相对比较温和等特点，故重点研究和发发展船用捷联式惯性导航系统也是自然的。

1977年，在第一届国际惯性测量学术会议上，有的专家曾预言：未来的运载体导航定位技术将为惯性技术所垄断。但是不到10年，即在1985年第二届国际惯性测量学术会议上，由于卫星定位技术远比惯性技术定位精度高，而且卫星接收机远比惯性测量系统便宜，因而，有一种意见认为可以不再发展惯性导航技术；另一种意见则提醒人们应注意，卫星信号在水下和地下往往是无法接收到，且易受干扰，所以正确的做法是将

二者结合起来,应积极研制中等精度的惯性导航系统和多路复用的“全球定位系统”(Global Positioning System, 简写 GPS)接收机,并着手研究将惯性导航系统和 GPS 系统组合起来的复合系统。这是因为当全球定位系统(GPS)建成以后,预计在离地面约 20000km 的高空将形成一个由 18 颗卫星组成的导航星“星座”,为空中、海上、陆上任何地点的运载体提供全天候、全自动、连续、快速和高精度的三维定位信息,这些运载体还可以利用它来进行高精度三维矢量测速和时间校准。但该系统却不能提供运载体的姿态角和姿态角速率,而它们对运载体的控制系统又是十分必须的。

国外有人把捷联式惯性导航系统列为低成本惯性导航系统。由于捷联系统提供的信息全部是数字信息,所以特别适用于各种舰船的数字航行控制系统及武备系统。

假如将船用捷联式平台罗经中引入多普勒计程仪的信息,就可以形成了多普勒导航仪——惯性/水声综合导航系统。这是因为目前舰船一般安装的计程仪大多数是电磁计程仪,它是一种单轴计程仪,仅能测量首尾线方向舰船相对水的速度。为确保舰船的航行安全,对舰船导航系统提出更高的要求,需要计程仪能准确地测量出舰船相对海底的速度矢量。多普勒计程仪则可以同时提供舰船首尾线方向和正横方向的速度分量。由于多普勒计程仪能实时地测量相对于海底的地速,这是人们颇感兴趣的。但是跟踪海底的深度是一定的,当舰船航行在深水海域时,多普勒计程仪只能工作在跟踪水层上方提供相对于水的速度,所以说提高多普勒计程仪的工作深度是一个至关重要的课题。

将船用捷联式平台罗经和多普勒计程仪相结合而构成的多普勒导航系统,可以用来测定舰船沿期望航线与偏离期望航线的速度和航程,由于多普勒导航系统中的多普勒计程仪的换能器基阵采用固定式,为消除由舰船摇摆产生的测速误差,可以由捷联式平台罗经实时地输出水平姿态信息通过计算机给以校正,这样由惯性与水声原理组成的多普勒导航仪则可以准确地提供舰船导航用各种参数。所以说随着计算机的飞速发展,捷联系统的应用必然越来越广泛。

§ 1.5 舰船位置和姿态角的确定

舰船导航需要的参数有许多,但其中最基本的是舰船瞬时地理位置和姿态角。

一、姿态矩阵 T

舰船的姿态角实际上就是舰船坐标系 Ox_b, Y_b, Z_b 和地理坐标系 Ox_t, Y_t, Z_t 之间的方位关系,如图 1-2-2 所示。 b 系相对 t 系的角位置可以用一组欧拉角 H 、 ψ 、 θ 来表示两个坐标系之间的变换关系。按照首向角、纵摇角、横摇角的定义,可按下列顺序分三次转动得到。

$$Ox_t, Y_t, Z_t \xrightarrow{-H} Ox_{b_1}, Y_{b_1}, Z_{b_1} \xrightarrow{\psi} Ox_{b_2}, Y_{b_2}, Z_{b_2} \xrightarrow{\theta} Ox_b, Y_b, Z_b$$

其变换关系为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos H & -\sin H & 0 \\ \sin H & \cos H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos H \cos \theta + \sin H \sin \psi \sin \theta & \cos H \sin \psi \sin \theta - \sin H \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin H \cos \psi & \cos \psi \cos H & \sin \psi \\ \cos H \sin \theta - \sin H \sin \psi \cos \theta & -\sin H \sin \theta - \cos H \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (1-5-1) \end{aligned}$$

即

$$\begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} = T_b^i \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = (T_b^i)^{-1} \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} = T_b^i \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \quad (1-5-2)$$

这是因为矩阵 T 为正交矩阵, 所以有 $T^{-1} = T^T$, 可用变换矩阵 T_b^i 实现由地理坐标系 $O X_i Y_i Z_i$ 到舰船坐标系 $O X_b Y_b Z_b$ 的坐标变换。由于方向余弦矩阵 T_b^i 的元素可以单值地确定舰船的姿态角, 故矩阵 T_b^i 常常称为姿态矩阵。在以后的讨论中, 有时也把姿态矩阵 T_b^i 称为捷联矩阵。

显然, 姿态矩阵 T_b^i 中的元素是舰船的首向角、纵摇角、横摇角的函数。若知道了它们的元素值, 则可以单值地计算出 H 、 ψ 、 θ 的大小。

$$\begin{aligned} T_b^i &= \begin{bmatrix} \cos H \cos \theta + \sin H \sin \psi \sin \theta & \sin H \cos \psi & \cos H \sin \theta - \sin H \sin \psi \cos \theta \\ \cos H \sin \psi \sin \theta - \sin H \cos \theta & \cos \psi \cos H & -\sin H \sin \theta - \cos H \sin \psi \cos \theta \\ -\cos \psi \sin \theta & \sin \psi & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (1-5-3) \end{aligned}$$

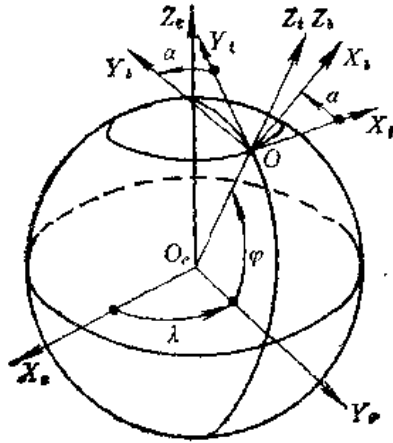
$$\begin{cases} H = \text{arctg}(T_{12}/T_{22}) \\ \psi = \text{arcsin} T_{32} \\ \theta = \text{arctg}(-T_{31}/T_{33}) \end{cases} \quad (1-5-4)$$

在平台式惯性导航系统中, 地理坐标系 $O X_i Y_i Z_i$ 可以由系统中的稳定平台实体模拟, 舰船相对地理坐标系的姿态角的大小可以从常平架轴上直接测量出来。而在捷联式惯性导航系统中, 由于没有实体的稳定平台, 因此必须实时地计算姿态矩阵, 再从姿态矩阵元素中提取首向角、纵摇角、横摇角信息。

二、位置矩阵 C_b^e

当舰船坐标系 $O X_b Y_b Z_b$ 相对地理坐标系 $O X_i Y_i Z_i$ 没有转动时, 可直接用 $O X_b Y_b Z_b$ 与地球坐标系 $O_e X_e Y_e Z_e$ 之间的变换矩阵 C_b^e 来表示二者的转动关系。尽管两个坐标系的坐标原点不重合, 但可以通过平移使它们重合, 如图 1-5-1 所示。

从地球坐标系 $O_e X_e Y_e Z_e$ 转到舰船坐标系 $O X_b Y_b Z_b$ 的关系是按下列转动顺序得到的。

图1-5-1 位置矩阵 C_s^b 示意图

$$OX_s, Y_s, Z_s \xrightarrow{\lambda} OX_{s1}, Y_{s1}, Z_{s1} \xrightarrow{90^\circ - \varphi} OX_{s2}, Y_{s2}, Z_{s2} \xrightarrow{90^\circ} OX_s, Y_s, Z_s \xrightarrow{\alpha} OX_t, Y_t, Z_t$$

游动方位角 α 表示舰船纵轴 OY_t 和北向轴 OY_s 的夹角不为零, 而是有随时间变化的游动方位角速率 $\dot{\alpha}$, 如同经、纬度变化速率 λ 、 φ 一样。上述转动关系可以写成下列矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\sin\varphi\sin\lambda - \cos\alpha\sin\lambda & -\sin\alpha\sin\varphi\sin\lambda + \cos\lambda\cos\alpha & \sin\alpha\cos\varphi \\ -\cos\alpha\sin\varphi\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda & -\cos\alpha\sin\varphi\sin\lambda - \sin\alpha\cos\lambda & \cos\alpha\cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} \quad (1-5-5)$$

其中令

$$C_s^b = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\sin\varphi\sin\lambda - \cos\alpha\sin\lambda & -\sin\alpha\sin\varphi\sin\lambda + \cos\lambda\cos\alpha & \sin\alpha\cos\varphi \\ -\cos\alpha\sin\varphi\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda & -\cos\alpha\sin\varphi\sin\lambda - \sin\alpha\cos\lambda & \cos\alpha\cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (1-5-6)$$

由式 (1-5-6) 中的矩阵元素可以单值地确定 φ 、 λ 、 α 的真值。为此首先要确定 φ 、 λ 、 α 的定义域。纬度 φ 的定义域为 $(-90^\circ, 90^\circ)$, 经度 λ 的定义域为 $(-180^\circ, 180^\circ)$, 游动方位角 α 的定义域为 $(0, 360^\circ)$, 这样对于舰船在地球表面任意位置都有唯一一组 φ 、 λ 、 α 值与之相对应。由于方向余弦矩阵 C_s^b 为正交矩阵, 则有: $(C_s^b)^{-1} = (C_s^b)^T$, 这样式 (1-5-5) 可以改写成:

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = C_s^b \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \quad (1-5-7)$$

通常称 C_s^b 为位置矩阵, 这是因为它可以单值地确定舰船在地球表面的经、纬度 λ 、 φ 的大小。

位置矩阵 C_s^b 可表示成:

$$C_i^e = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\sin\varphi\sin\lambda - \cos\alpha\sin\lambda & -\cos\alpha\sin\varphi\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\alpha\sin\varphi\sin\lambda + \cos\alpha\cos\lambda & -\cos\alpha\sin\varphi\sin\lambda - \sin\alpha\cos\lambda & \sin\lambda\cos\varphi \\ \sin\alpha\cos\varphi & \cos\alpha\cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (1-5-8)$$

由式 (1-5-8) 根据反三角函数运算可以确定 φ 、 λ 、 α 。由于反三角函数的多值性，所以应先求其主值。

$$\begin{cases} \varphi_{\pm} = \arcsin(C_{33}) \\ \lambda_{\pm} = \arctg(C_{23}/C_{13}) \\ \alpha_{\pm} = \arctg(C_{31}/C_{32}) \end{cases} \quad (1-5-9)$$

当反三角函数的主值确定之后，再根据反三角函数的主值域与 φ 、 λ 、 α 的定义域及位置矩阵 C_i^e 的有关元素的正负号来确定 φ 、 λ 、 α 的大小，以便最后确定舰船在地球表面的瞬时位置信息 λ 、 φ 的值，详细讨论将在下一章中进行。

三、三种运动的关系

位置矩阵 C_i^e 的变化是由舰船坐标系 Ox_i, Y_i, Z_i 相对地球坐标系 $O_e X_e, Y_e, Z_e$ 运动的位置速率 ω_i^e 所引起的；姿态矩阵 T_i^e 的变化是由舰船坐标系 Ox_i, Y_i, Z_i 相对当地地理坐标系 $O X, Y, Z$ 的姿态速率 ω_i^g 所引起的。而捷联式惯性导航系统中两种惯性敏感器——陀螺仪与加速度计的测量基准又都是符合牛顿力学定律的惯性坐标系，所以研究舰船导航时常常把地球坐标系 $O_e X_e, Y_e, Z_e$ 和地理坐标系 $O X, Y, Z$ 称为动参考坐标，而把地心惯性坐标系 $O_e X_e, Y_e, Z_e$ 近似认为是定参考坐标系，这样舰船相对定参考系的运动称为绝对运动，舰船相对动参考系的运动称为相对运动，而动参考系相对定参考系的运动称为牵连运动，三者之间的关系可由图 1-5-2 所示。

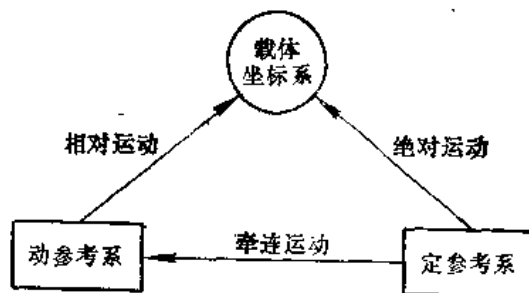


图1-5-2 三种运动关系示意图

根据前面坐标系取向的规定，例如以 ω_i^g 来说明，表示在地理坐标系 $O X, Y, Z$ 内，它是地理坐标系 $O X, Y, Z$ 相对惯性坐标系 $O_e X_e, Y_e, Z_e$ 的转动角速度，下注角表示是哪两个坐标系之间存在的角速度大小，上注角表示是在哪个坐标系内的角速度矢量。 ω_i^g 还可以表示成三个角速率分量：

$$\omega_i^g = \begin{bmatrix} \omega_{i1}^g \\ \omega_{i2}^g \\ \omega_{i3}^g \end{bmatrix} \quad (1-5-10)$$

式中 ω_{i1}^g ——矢量 ω_i^g 在地理坐标系 $O X, Y, Z$ 内 $O X$ 轴上的分量。

以上规定的角速率表示方法原则上在本书中普遍适用，例如舰船在地球上某一点运动时，舰船所在位置的地理坐标系相对惯性坐标系的转动角速率将由两部分合成：

$$\omega_{i_1}^i = \omega_{i_1}^{i_0} + \omega_{i_1}^{i_2} \quad (1-5-11)$$

式中

$$\omega_{i_1}^{i_2} = \begin{bmatrix} \omega_{i_1}^{i_2} \\ \omega_{i_1}^{i_2} \\ \omega_{i_1}^{i_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{i_2} \cos \varphi \\ \omega_{i_2} \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (1-5-12)$$

舰船相对地球运动而引起的地理坐标系的角速度分量为:

$$\omega_{i_2}^{i_1} = \begin{bmatrix} \omega_{i_2}^{i_1} \\ \omega_{i_2}^{i_1} \\ \omega_{i_2}^{i_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{i_2}^{i_1}/R \\ V_{i_2}^{i_1}/R \\ V_{i_2}^{i_1} \cdot \operatorname{tg} \varphi / R \end{bmatrix} \quad (1-5-13)$$

显然

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = V_{i_2}^{i_1}/R \\ \dot{\lambda} = V_{i_2}^{i_1}/R \cos \varphi \end{cases} \quad (1-5-14)$$

这样, 地理坐标系 $O X_1 Y_1 Z_1$ 相对惯性坐标系 $O_e X_e Y_e Z_e$ 的角速度 $\omega_{i_1}^{i_0}$ 的表达式为:

$$\omega_{i_1}^{i_0} = \begin{bmatrix} -V_{i_2}^{i_1}/R \\ \Omega \cos \varphi + V_{i_2}^{i_1}/R \\ \Omega \sin \varphi + V_{i_2}^{i_1} \cdot \operatorname{tg} \varphi / R \end{bmatrix} \quad (1-5-15)$$

若考虑舰船姿态矩阵 $T_{i_1}^{i_0}$ 的变化, 则舰船坐标系 $O X_2 Y_2 Z_2$ 相对惯性坐标系 $O_e X_e Y_e Z_e$ 的变化可以表示为:

$$\omega_{i_2}^{i_0} = \omega_{i_2}^{i_1} + \omega_{i_2}^{i_0} = \omega_{i_2}^{i_0} + \omega_{i_2}^{i_1} + \omega_{i_2}^{i_3} \quad (1-5-16)$$

当然, 也可以将 $\omega_{i_2}^{i_0}$ 表示在舰船坐标系 $O X_2 Y_2 Z_2$ 内, 即 $\omega_{i_2}^{i_0} = T_{i_2}^{i_0} \omega_{i_2}^{i_0}$.

第二章 捷联式惯性导航系统机械编排

捷联式惯性导航系统的机械实体布局、采用的坐标系及解析计算方法的总和称为机械编排。它体现了从加速度计的输出来计算出即时速度和位置的整个过程。作为舰船运动，一般具有三个角运动及两个线运动自由度，欲想在这样的运动条件下达到舰船导航目的，首先应通过惯性敏感器——陀螺仪在舰船上建立一个基准坐标系。对于平台式的惯性导航系统，这个基准坐标系是通过常平架的平台来实现的；而对于捷联式惯性导航系统是通过计算机内的软件来实现的。然后由测得已知方位的加速度分量通过计算机实现积分技术计算出舰船的瞬时速度和位置。模拟不同坐标系的带有常平架的稳定平台在捷联系统中则可以利用计算机内不同编排的软件程序来实现。根据捷联系统中的解析平台选取方法不同可以分为：惯性坐标系的捷联式惯性导航系统；游动方位坐标系的捷联式惯性导航系统；自由方位坐标系的捷联式惯性导航系统；地理坐标系的捷联式惯性导航系统。对于捷联系统中应用的陀螺仪，就其功能来分，除了速率陀螺之外，还有诸如用静电陀螺来测量角位置的位置陀螺，用位置陀螺构成的捷联式惯性导航系统。

§ 2.1 惯性坐标系的捷联式惯性导航系统

用惯性坐标系的捷联式惯性导航系统，相当于空间稳定的平台式惯性导航系统。在空间稳定的平台式惯性导航系统中，有一个具有三轴常平架的陀螺稳定平台，该平台相对于惯性空间稳定。它是利用陀螺仪主轴在惯性空间保持方向不变的定轴性，通过三套伺服随动系统使平台能在惯性空间保持给定的姿态。安装在稳定平台上的加速度计被稳定在惯性坐标系中，其测量的比力经引力补偿后，进行两次积分即可得舰船在惯性空间中的位置，然后再将该位置矢量转换成需要的导航信息，系统的原理图如图 2-1-1 所示。

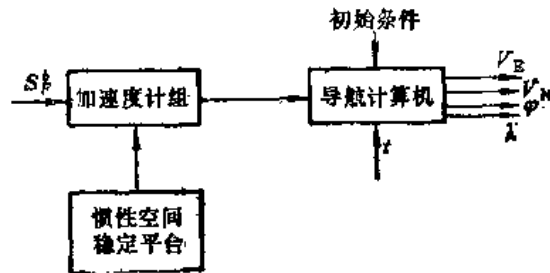


图 2-1-1 空间稳定的平台式惯性导航系统示意图

而在用惯性坐标系的捷联式惯性导航系统中，导航用的加速度计是直接固接在舰船上，它测量的是舰船坐标系轴向比力 S_F^b ，只要把这个比力变换到惯性坐标系上，则其他计算就和空间稳定的平台式惯性导航系统一样，其原理示意图见图 2-1-2 所示。

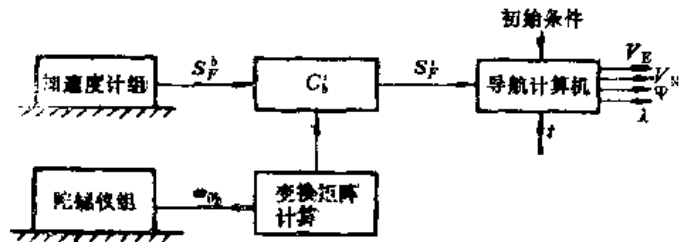


图 2-1-2 用惯性坐标系的捷联式惯性导航系统示意图

一、变换矩阵 C_i^b 的计算

在用惯性坐标系的捷联式惯性导航系统中，从测得的比力 S_i^b 和在惯性坐标系上得到的比力投影 S_i^i ，就可以知道变换矩阵 C_i^b 的关系式为：

$$S_i^b = C_i^b S_i^i \quad (2-1-1)$$

变换矩阵 C_i^b 可从第一章叙述的动矢量导数的概念进一步求得。

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_i = \left. \frac{dr}{dt} \right|_b + \omega_{ib} \times r^b \quad (2-1-2)$$

由于该转动矢量是以惯性坐标系为基准，假定研究的问题中惯性坐标系是不动的， $\left. \frac{dr}{dt} \right|_i = 0$ ，所以在舰船坐标系中有矩阵形式：

$$\dot{r}^b = -(\omega_{ib} \times) r^b = -\omega_{ib}^{bi} r^b \quad (2-1-3)$$

当把 $\omega_{ib} \times$ 定义为 ω_{ib}^{bi} ，称 ω_{ib}^{bi} 为 ω_{ib} 在舰船坐标系投影的反对称矩阵，记作：

$$(\omega_{ib} \times) = \omega_{ib}^{bi} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ib}^{b1} & \omega_{ib}^{b2} \\ \omega_{ib}^{b1} & 0 & -\omega_{ib}^{b3} \\ -\omega_{ib}^{b2} & \omega_{ib}^{b3} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-1-4)$$

式 (2-1-4) 是舰船坐标系 (b 系) 相对惯性坐标系 (i 系) 的转动角速度在载体坐标系轴向上的分量反对称形式。

考虑到有旋转矢量 r 坐标变换关系有：

$$r^i = C_i^b r^b$$

两边取导数

$$\dot{r}^i = \dot{C}_i^b r^b + C_i^b \dot{r}^b$$

考虑到我们是以假定惯性坐标系 (i 系) 作为参考坐标系，作为参考坐标系者可以认为它在空间是不动的，即 $\dot{r}^i = 0$ ，则有：

$$C_i^b \dot{r}^b = -\dot{C}_i^b r^b \quad (2-1-5)$$

将式 (2-1-3) 代入式 (2-1-5)，得：

$$\dot{C}_i^b = C_i^b \omega_{ib}^{bi}$$

由于 ω_{ib}^{bi} 为陀螺仪测量得到的舰船相对惯性空间的角速度，其反对称形式中的角速度在坐标轴上的投影值随时间变化的很快，因此上述矩阵的微分方程必须以很高的运算速度进行计算。为提高运算速度，减少计算工作量，通常用四元数法解该微分方程。有关四元数的概念将在下一章详细介绍。

二、惯性坐标系中的加速度

根据牛顿定律，加速度计测得的是惯性坐标系内的加速度。实际上，加速度计的輸出是正比于舰船相对惯性坐标系的加速度与地心引力加速度的矢量和（忽略其他星体的引力加速度所产生的误差），如下式表示：

$$\ddot{R}_i^b = S_i^b + g_m^i = C_i^b S_i^b + g_m^i \quad (2-1-6)$$

式中 \ddot{R}_i^b ——计算的惯性加速度矢量；

g_m^i ——地心引力加速度矢量。

由于舰船导航定位是相对于地球表面进行的，故应进行坐标变换才能得到舰船在地球表面的速度及经、纬度位置坐标，这里除了首先要解决坐标变换问题外，还应解决引力加速度的修正问题。

三、引力加速度的计算

欲使稳定平台被稳定在惯性空间，由式 (1-3-25) 得知重力加速度 g 与引力加速度存在下列关系：

$$g = g_m - \Omega \times (\Omega \times R)$$

在起始点 A 时，惯性坐标系 Ox_i, Y_i, Z_i 与地理坐标系 Ox, Y, Z 重合，如图 2-1-3 所示。 Ox_i 轴垂直 Y_i, OX_i 平面（图中纸面）， Y_i 轴水平， Z_i 轴为起始点 A 的垂线方向，在 A 点时重力加速度 g 与平面垂直，此时水平加速度计将不感受重力加速度 g 。当舰船在惯性空间从 A 点移动至 B 点时，加速度计除了感受位移加速度的三个分量 \ddot{x} 、 \ddot{y} 、 \ddot{z} 外，还将感受重力 g 的三个分量 g_x 、 g_y 、 g_z ，由图 (2-1-3) 可知：

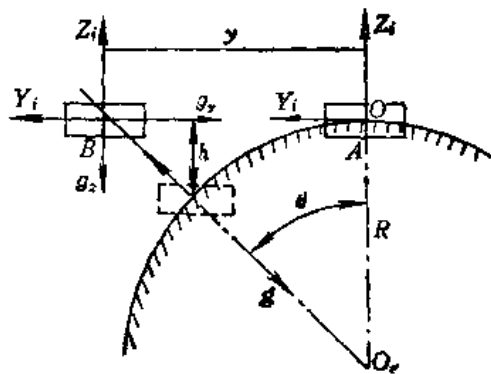


图2-1-3 g 与位置坐标关系示意图

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -gx/R + h \\ g_y &= -g \cos(90^\circ - \theta) = -g \sin \theta = -gy/R + h \\ g_z &= -gR/R + h \end{aligned} \right\} \quad (2-1-7)$$

考虑到舰船在地球表面运动， h 为零，则式 (2-1-7) 变为：

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -gx/R \\ g_y &= -gy/R \\ g_z &= -g \end{aligned} \right\} \quad (2-1-8)$$

从式 (2-1-8) 可以看出，重力加速度分量 g_x 、 g_y 、 g_z 分别是位置坐标 (x, y, z) 的函数。对于加速度计来说，它所感受的重力加速度的方向应与重力方向相反，则加速度计信息为：

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \ddot{x} - g_x = \ddot{x} + gx/R \\ a_y &= \ddot{y} - g_y = \ddot{y} + gy/R \\ a_z &= \ddot{z} - g_z = \ddot{z} + g \end{aligned} \right\} \quad (2-1-9)$$

由式 (2-1-9) 可得舰船的位移加速度表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= a_x - gx/R \\ \ddot{y} &= a_y - gy/R \\ \ddot{z} &= a_z - g \end{aligned} \right\} \quad (2-1-10)$$

对上述位移加速度，经一次积分运算可得到速度，经两次积分运算可得到位移坐标。该速度、位移的大小都是相对地心惯性坐标系而言的。为最后能得到舰船相对地球的速度及经纬度位置，还必须进行坐标变换才行。坐标变换关系为：

$$\omega_i^j = C_i^j \omega_e^k C_k^j \quad (2-1-11)$$

$$C_i^j = C_i^k \omega_e^k \quad (2-1-12)$$

这里的 $\omega_{ie}^{i_0}$ 为地球自转角速度在惯性空间坐标系轴向分量构成的反对称矩阵, 即

$$\omega_{ie}^{i_0} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ie} & 0 \\ \omega_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-1-13)$$

由式 (2-1-13) 略作变化, 有:

$$\dot{V}' = C_i' (\dot{R}' - \omega_{ie}^{i_0} R') \quad (2-1-14)$$

这里的 C_i' 可按下列公式求得, 其中 C_i^0 可由式 (1-5-8) 令 $\alpha = 0$ 得到。

$$\begin{aligned} C_i' &= C_i^0 C_i^i = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\omega_{ie}t & \sin\omega_{ie}t & 0 \\ -\sin\omega_{ie}t & \cos\omega_{ie}t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(\lambda + \omega_{ie}t) & \cos(\lambda + \omega_{ie}t) & 0 \\ -\sin\varphi\cos(\lambda + \omega_{ie}t) & -\sin\varphi\sin(\lambda + \omega_{ie}t) & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos(\lambda + \omega_{ie}t) & \cos\varphi\sin(\lambda + \omega_{ie}t) & \sin\varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-1-15)$$

显然, 由于 ω_{ie} 是已知的, 矩阵 C_i' 可以用位置信息 φ 、 λ 来构成。

四、位置的计算

为了确定舰船在地球表面的位置参数 φ 、 λ , 这里先来介绍一下地球形状。以海平面作为基准, 延伸到全部陆地所形成的表面称为大地水准面。大地水准面所包围的几何体称为地球体。地球体的表面是地球重力场的一个等位面, 也就是地球体的法线方向和重力方向相一致。地球的重力是万有引力和地球自转的离心力的合成。由于地球质量的分布不均匀和受太阳、月亮等天体的运动影响等, 使地球重力场的大小和方向发生不规则的变化, 因此地球体的形状, 实际上也是不规则的几何体。在工程技术的应用中, 必须采取某种近似的方法, 将地球看成是具有半径为 R 的球体。这是一般工程技术中所采用的。进一步的精确近似, 可把地球体看成是一个旋转椭球体, 其长半轴在赤道平面内, 短半轴和自转轴互相重合, 如图 2-1-4 所示。参考椭球体的曲线方程为:

$$\frac{X^2 + Y^2}{R_e^2} + \frac{Z^2}{R_p^2} = 1 \quad (2-1-16)$$

$$e = \frac{R_e - R_p}{R_e} \quad (2-1-17)$$

式中 e —— 椭球的椭圆度或扁率;

R_p —— 地球极轴半径;

R_e —— 地球赤道轴半径。

R_0 为舰船的地心位置矢量, 即为参考椭球向径, 见图 2-1-5。地面点的垂线偏差 D_0 与纬度 φ 有关, 二者的关系为:

$$D_0 = e \sin 2\varphi \quad (2-1-18)$$

通常采用两种参考椭球体。

(1) “国际” 椭球体

$$R_e = 6378388 \text{ m}, \quad e = 1/297$$

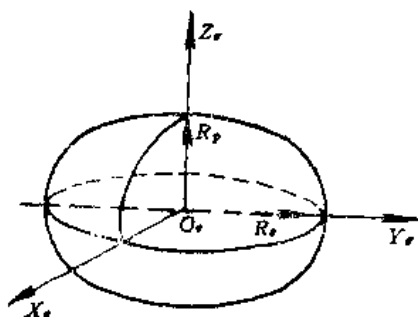


图2-1-4 参考椭球

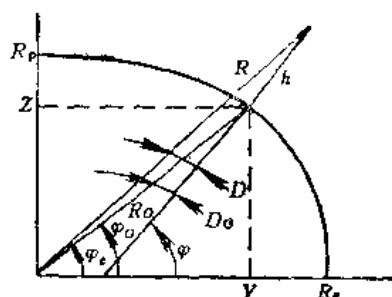


图2-1-5 地心位置矢量

(2) 美国国家航空航天管理局椭球体

$$R_e = 6378163 \pm 21 \text{ m}, \quad e = 1 / (298.24 \pm 0.01)$$

显然, 从图 2-1-5 可以得出地理纬度 φ 和地心纬度 φ_o 的关系为:

$$\varphi = \varphi_o + D_o$$

$$\varphi_o = \sin^{-1} \frac{\hat{z}}{\hat{R}_o} \quad (2-1-19)$$

由式 (2-1-18)、式 (2-1-19) 可得:

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{\hat{z}}{\hat{R}_o} + e \sin 2\hat{\varphi} \quad (2-1-20)$$

对于式 (2-1-20), 同样存在着地心位置矢量 \hat{R}_o 如何计算的问题。

由椭圆方程

$$\frac{z^2}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_p^2} = 1$$

得
$$\frac{dz}{dy} = \frac{-R_e^2}{R_p^2} \cdot \frac{y}{z} = -\text{ctg} \varphi \quad (2-1-21)$$

令椭球的偏心率为: $K^2 = \frac{R_e^2 - R_p^2}{R_e^2}$

则
$$R_p^2 / R_e^2 = 1 - K^2 \quad (2-1-22)$$

将式 (2-1-22) 代入式 (2-1-21), 得:

$$z = (1 - K^2) y \text{tg} \varphi \quad (2-1-23)$$

将式 (2-1-23) 代入前述的椭圆方程, 得:

$$\frac{(1 - K^2) y^2 \text{tg}^2 \varphi}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_p^2} = 1$$

把 $K^2 = \frac{R_e^2 - R_p^2}{R_e^2}$ 代入上述公式, 并略加整理, 得:

$$y = R_e \cos \varphi \quad (2-1-24)$$

再把式 (2-1-24) 代入式 (2-1-23), 得:

$$z = (1 - K^2) R_e \sin \varphi \quad (2-1-25)$$

从图 2-1-5 可以明显得到:

$$R_o = \sqrt{y^2 + z^2} = R_e (1 - K^2 \sin^2 \varphi) \quad (2-1-26)$$

考虑到,

$$K^2 = \frac{R_e^2 - R_p^2}{R_e^2} = \frac{2R_e^2 - 2R_e R_p - R_e^2 + 2R_e R_p - R_p^2}{R_e^2}$$

$$= \frac{2(R_e - R_p)}{R_e} - \left(\frac{R_e - R_p}{R_e}\right)^2 = 2e - e^2 \quad (2-1-27)$$

将式 (2-1-27) 代入式 (2-1-26), 得:

$$R_0 = R_e (1 - (2e - e^2) \sin^2 \varphi) \quad (2-1-28)$$

这样就可以根据式 (2-1-25)、式 (2-1-28) 对 z 和 R_0 进行估计, 并代入式 (2-1-20), 可得地理纬度 φ 的估计值 $\hat{\varphi}$ 。

为了定义舰船所处位置的经度, 需介绍一下本初子午线的概念。本初子午线又称零度经度子午线。公认通过英国格林尼治天文台的子午线为本初子午线。我们把舰船所处地理位置的子午面和本初子午面之间的夹角称为地理经度 λ , 又称大地经度。

把舰船所处地理位置的子午面和惯性坐标系 X, Y, Z 的平面的夹角 λ_i 称为黄经。显然有:

$$\lambda_i = \arcsin \frac{\hat{y}}{(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)^{1/2}} = \omega_{ie} t + \lambda \quad (2-1-29)$$

所以有:

$$\hat{\lambda} = \arcsin \frac{\hat{y}}{(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)^{1/2}} - \omega_{ie} t \quad (2-1-30)$$

五、姿态角的计算

一艘统称舰船的首向角、纵摇角、横摇角为姿态角。根据测量得到的舰船相对惯性空间的角速度的大小由式 (2-1-6) 求得变换矩阵 C_i^i , 再根据前述计算得到的经纬度 λ 、 φ 值由式 (2-1-15) 得到其位置矩阵 C_i^i , 于是, 其姿态矩阵 T_i^i 为:

$$T_i^i = C_i^i C_i^i \quad (2-1-31)$$

姿态角的大小可以根据式 (1-5-4) 从姿态矩阵 T_i^i 中的元素提取。采用惯性坐标系的捷联式惯性导航系统的方块图如图 2-1-6 所示。

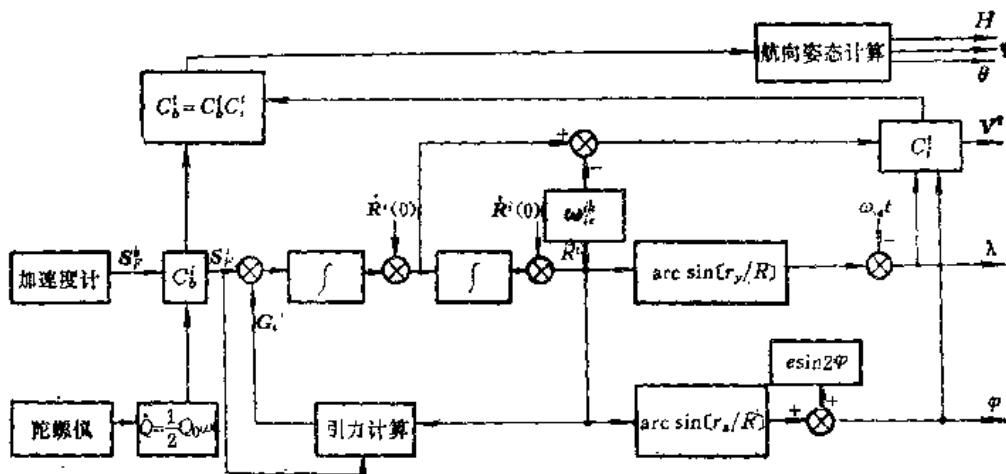


图2-1-6 采用惯性坐标系的捷联式惯性导航系统方块图

惯性基准系统即空间稳定导航系统，已广泛用于不需要地理坐标系导航信息的航天飞行器。对于地球表面的导航来说，由于惯性坐标系和地理坐标系之间有着固有的时间变化关系，采用空间稳定系统会使设计复杂化，所以对于舰船，采用地理坐标系的捷联式导航系统更为合适。

§ 2.2 游动自由方位坐标系的捷联式惯性导航系统

自由方位坐标系实际上仍然是一种地理坐标系。它又可以根据这个坐标系绕垂直轴相对惯性坐标系是否转动分成游动自由方位坐标系和自由方位坐标系。

游动自由方位坐标系绕垂直轴只跟踪地球的转动，以 $\omega_e \sin \varphi$ 相对惯性空间转动，也就是平台坐标系相对惯性空间坐标系转动角速度在平台坐标系上的投影为 $\omega_{ie}^{zy} = \omega_e \sin \varphi$ 。舰船在航行中，平台坐标系相对于地球没有确定的方位指向，不是跟踪由于舰船相对地球运动形成的绕垂直轴的转动，所以随着舰船运动，游动自由方位坐标系在方位上相对地球是游动的。在选取计算平台坐标系时取 $\omega_{ie}^{zy} = 0$ ，这时平台的方位既不稳定指向正北，也不稳定在惯性坐标系方向。平台坐标系的 OY_p 轴和正北 OY_e 轴的夹角不为零，而是一个随时间变化的游动自由方位角 α ，如图 2-2-1 所示。

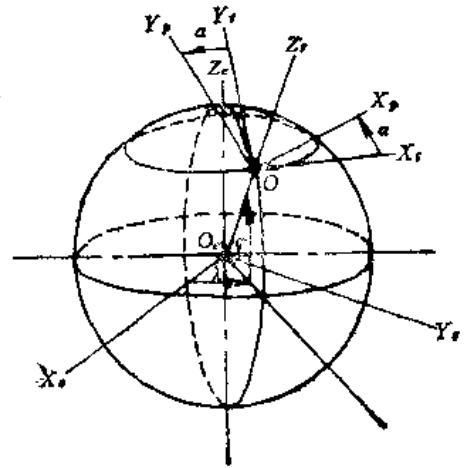


图2-2-1 游动自由方位系统的平台坐标系

游动自由方位系统的惯性导航系统原理方块图如图 2-2-2 所示。游动自由方位系统一般多采用方向余弦法，这是因为游动自由方位系统中 $\omega_{ie}^{zy} = 0$ ，采用方向余弦法更有

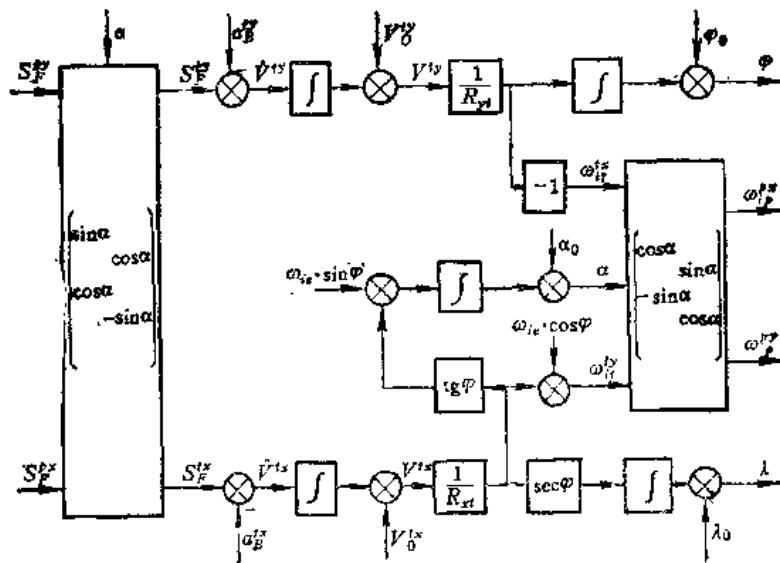


图2-2-2 游动自由方位系统的惯性导航系统原理方块图

优越性。所以目前的平台式惯性导航系统和捷联式惯性导航系统均较多地采用了游动自由方位系统。上一节介绍的导航原理是求得沿地理坐标系的 \dot{v}_{ib}^g 、 \dot{v}_{ib}^g ，并进行两次积分，从而进行导航参数的计算。对于游动自由方位系统，则首先要将沿平台坐标系测量的比力转换到地理坐标系，再经过求解方向余弦矩阵的微分方程，才能求取各种导航参数。

一、转动方向余弦矩阵的微分方程

绕定点转动的两个坐标系之间的关系可用方向余弦矩阵来表示，而方向余弦矩阵本身也是随时间变化的，其变化规律可用方向余弦矩阵的微分方程来描述，方向余弦矩阵的即时值就是求解该微分方程而得到的。

为使问题简化，假定地理坐标系（ i 系）不动，取 i 系为参考坐标系，由第一章的动矢量导数理论可知：

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_i = \left. \frac{dr}{dt} \right|_b + \omega_{ib} \times r \quad (2-2-1)$$

这里 ω_{ib} 为 b 系相对 i 系的角速度矢量，而 ω_{ii} 则表示 i 系相对 i 系的角速度矢量。当舰船速度 $V=0$ ，则 $\omega_{ii}=\omega_{ib}$ ，即等于地球自转角速度。实际上，惯性敏感器——陀螺仪所测得的角速度 $\omega_{ib}=\omega_{ii}+\omega_{ib}$ 。若根据实际纬度值 φ 将 ω_{ii} 从 ω_{ib} 中扣除，则可以得到 ω_{ib} 在 b 系上的投影分量。为了求得舰船瞬时首向角、纵摇角、横摇角的大小，假定 i 系不动，则有：

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_i = 0 \quad (2-2-2)$$

将式 (2-2-2) 代入式 (2-2-1)，可得：

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_b = -\omega_{ib} \times r \quad (2-2-3)$$

以矩阵形式表示为：

$$\dot{r}^b = -[\omega_{ib} \times] r^b = -\omega_{ib}^{b \times} r^b \quad (2-2-4)$$

式中

$$\omega_{ib} \times \triangleq \omega_{ib}^{b \times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ib}^{b_2} & \omega_{ib}^{b_3} \\ \omega_{ib}^{b_2} & 0 & -\omega_{ib}^{b_1} \\ -\omega_{ib}^{b_2} & \omega_{ib}^{b_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-2-5)$$

称 $\omega_{ib}^{b \times}$ 为 ω_{ib} 在 b 坐标系上投影的反对称矩阵。具有矢量变换公式为：

$$r^i = T_{ib}^i r^b \quad (2-2-6)$$

求导后有：

$$\dot{r}^i = \dot{T}_{ib}^i r^b + T_{ib}^i \dot{r}^b \quad (2-2-7)$$

由于 $\dot{r}^i = 0$ ，则式 (2-2-7) 变成：

$$\dot{r}^b = -T_{ib}^b \dot{T}_{ib}^i r^b \quad (2-2-8)$$

比较式 (2-2-4) 与式 (2-2-8)，则可得：

$$\dot{T}_i^j = T_i^k \omega_k^j = \begin{bmatrix} T_{31}\omega_{i3}^{b2} - T_{21}\omega_{i2}^{b2} & T_{32}\omega_{i3}^{b1} - T_{22}\omega_{i2}^{b1} & T_{33}\omega_{i3}^{b0} - T_{23}\omega_{i2}^{b0} \\ T_{11}\omega_{i1}^{b2} - T_{31}\omega_{i3}^{b2} & T_{12}\omega_{i1}^{b1} - T_{32}\omega_{i3}^{b1} & T_{13}\omega_{i1}^{b0} - T_{33}\omega_{i3}^{b0} \\ T_{21}\omega_{i2}^{b2} - T_{11}\omega_{i1}^{b2} & T_{22}\omega_{i2}^{b1} - T_{12}\omega_{i1}^{b1} & T_{23}\omega_{i2}^{b0} - T_{13}\omega_{i1}^{b0} \end{bmatrix} \quad (2-2-9)$$

对式 (1-5-4) 的首向角、纵摇角、横摇角表达式求导, 可得:

$$\begin{cases} \dot{H} = \frac{(T_{12}/T_{22})}{1 + (T_{12}/T_{22})^2} = \frac{T_{22}\dot{T}_{12} - T_{12}\dot{T}_{22}}{T_{12}^2 + T_{22}^2} \\ \dot{\psi} = \frac{\dot{T}_{32}}{(1 - T_{32}^2)^{1/2}} \\ \dot{\theta} = \frac{(-T_{31}/T_{33})}{1 + (-T_{31}/T_{33})^2} = \frac{T_{31}\dot{T}_{33} - T_{33}\dot{T}_{31}}{T_{31}^2 + T_{33}^2} \end{cases} \quad (2-2-10)$$

将式 (2-2-9) 中元素表达式代入式 (2-2-10), 可得到:

$$\begin{cases} \dot{H} = \frac{T_{22}(T_{32}\omega_{i3}^{b2} - T_{22}\omega_{i2}^{b2}) - T_{12}(T_{12}\omega_{i1}^{b2} - T_{32}\omega_{i3}^{b2})}{T_{12}^2 + T_{22}^2} \\ \dot{\psi} = \frac{T_{22}\omega_{i2}^{b1} - T_{12}\omega_{i1}^{b1}}{(1 - T_{32}^2)^{1/2}} \\ \dot{\theta} = \frac{T_{31}(T_{23}\omega_{i2}^{b0} - T_{13}\omega_{i1}^{b0}) - T_{33}(T_{31}\omega_{i3}^{b0} - T_{11}\omega_{i1}^{b0})}{T_{31}^2 + T_{33}^2} \end{cases} \quad (2-2-11)$$

从式 (2-2-11) 得知首向角、纵摇角、横摇角 H 、 ψ 、 θ 是 ω_{i1}^{b2} 、 ω_{i2}^{b1} 、 ω_{i3}^{b0} 的瞬变函数。当初始值 $H(0)$ 、 $\psi(0)$ 、 $\theta(0)$ 确定了姿态矩阵 $T_i^j(0)$ 中的对应元素 $T_{ij}(0)$ 后, 再对式 (2-2-11) 积分, 则可得到姿态角 H 、 ψ 、 θ 的大小。

为了单值地确定 H 、 ψ 、 θ 的真值, 首先应给出它们的定义域。首向角的定义域为 $(0^\circ, 360^\circ)$, 横摇角 θ 、纵摇角 ψ 的定义域 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 。对式 (1-5-4) 分析表明, 纵摇角和横摇角的定义域和反正弦函数的主值域及反正切函数的主值域是一致的, 而首向角 H 的定义域与反正切函数的主值定义域却不一致, 可以在求得首向角 H 的主值后还要根据 T_{22} 的正负符号来确定其真值, 由定义

$$H = \arctg(T_{12}/T_{22}) = \arctg(\sin H \cos \psi / \cos H \cos \psi)$$

由于在纵摇角 ψ 的定义域 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 内 $\cos \psi$ 永远为正, 所以 T_{12} 与 $\cos \psi$ 同号, 利

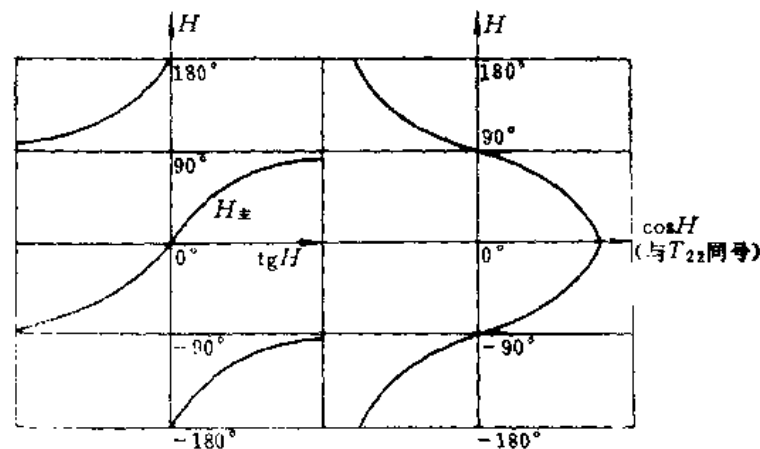


图2-2-3 首向角 H 的真值与 $\cos H$ 的关系

用 T_{22} 与首向角 H_{\pm} 的正负值可在 H 的定义域内确定首向角的真值 H , 参看图 2-2-3, 有:

$$H = \begin{cases} H_{\pm} & \text{当 } T_{22} > 0 \text{ 时} \\ H_{\pm} + 180^{\circ} & \text{当 } T_{22} < 0 \text{ 时} \\ H_{\pm} - 180^{\circ} & \text{当 } T_{22} < 0 \text{ 时} \end{cases} \begin{cases} H_{\pm} < 0 \\ H_{\pm} > 0 \end{cases} \text{ 时} \quad (2-2-12)$$

实际上对于游动自由方位系统, OY_p 与 OY_r 的夹角为游动方位角 α , 则舰船的纵轴在水平面的投影与真北 (沿 OY_r 轴) 的夹角为首向角 H , 而舰船纵轴在水平面的投影与 OY_p 的夹角为 H_c , 三者关系为:

$$H = H_c + \alpha \quad (2-2-13)$$

在实际系统中, 要根据式 (2-2-13) 给以适当换算。

二、游动自由方位系统的方向余弦法

1. 位置矩阵 C_p^e

当舰船坐标系 OX_p, Y_p, Z_p 相对地理坐标系 OX_r, Y_r, Z_r 存在姿态角 H, ψ, θ 时, 则可以用舰船上的平台坐标系 OX_p, Y_p, Z_p 与地球坐标系 OX_r, Y_r, Z_r 之间的转动关系表明该舰船相对地球的位置关系, 虽然两个坐标系的原点不重合, 但可以通过平移使它们重合, 并得到其转动关系, 可以用下式来表示:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = C_p^e \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} \quad (2-2-14)$$

式中 C_p^e 为地球坐标系转换到平台坐标系的方向余弦矩阵, 它是纬度 φ 、经度 λ 与游动自由方位角 α 的函数, 并按下列顺序转动来实现:

$$OX_r, Y_r, Z_r \xrightarrow{\lambda}_{OZ_r} OX_{r1}, Y_{r1}, Z_{r1} \xrightarrow{90^\circ - \varphi}_{OY_{r1}} OX_{r2}, Y_{r2}, Z_{r2} \xrightarrow{90^\circ}_{OZ_{r2}} OX_r, Y_r, Z_r \xrightarrow{\alpha}_{OZ_r} OX_p, Y_p, Z_p$$

上述的转动关系类似图 2-2-1 所示, 并可以写成如下的矩阵方程:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \alpha \sin \varphi \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda & -\sin \alpha \sin \varphi \sin \lambda + \cos \lambda \cos \alpha & \sin \alpha \cos \varphi \\ -\cos \alpha \sin \varphi \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda & -\cos \alpha \sin \varphi \sin \lambda - \sin \alpha \cos \lambda & \cos \varphi \cos \alpha \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} = C_p^e \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} \quad (2-2-15) \end{aligned}$$

由于可以由方向余弦矩阵 C_p^e 来确定舰船相对地球的位置 (经度 λ 和纬度 φ), 所以

通常又将 C^e 称为位置矩阵，当然由 C^e 还可以确定游动方位角 α 。

为了用矩阵 C^e 中的元素单值地确定 φ 、 λ 、 α 的真值，同样也要先确定 φ 、 λ 、 α 的定义域。其中纬度 φ 的定义域为 $(-90^\circ, 90^\circ)$ ；经度 λ 的定义域 $(-180^\circ, 180^\circ)$ ；游动自由方位角 α 的定义域为 $(0^\circ, 360^\circ)$ 。这样对于舰船相对地球的任意位置，也就是平台坐标系相对地球坐标系的任一位置，都有唯一的 φ 、 λ 、 α 与之对应。而 φ 、 λ 、 α 又可以根据 C^e 中的元素值通过反三角函数运算来确定，考虑到反三角函数是多值函数，所以应先求其主值：

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\pm} &= \arcsin c_{33} \\ \lambda_{\pm} &= \arctg(c_{32}/c_{31}) \\ \alpha_{\pm} &= \arctg(c_{13}/c_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (2-2-16)$$

这样，当反三角函数的主值确定后，便可根据反三角函数的主值域与 φ 、 λ 、 α 的定义域及 C^e 的有关元素的正负号来确定 φ 、 λ 、 α 的真值。

由于反正弦函数的主值域与 φ 的定义域是一致的，因此有：

$$\varphi = \varphi_{\pm} \quad (2-2-17)$$

由于反正切函数的主值域是 $(-90^\circ, 90^\circ)$ ， λ_{\pm} 与 λ 的定义域不一样，因此需要在 λ 的定义域内确定经度的真值 λ 。

从式 (2-2-15) 得到 c_{32} 与 c_{31} ，代入式 (2-2-16) 中 λ_{\pm} 的表达式得：

$$\lambda_{\pm} = \arctg(c_{32}/c_{31}) = \arctg(\cos \varphi \sin \lambda / \cos \varphi \cos \lambda)$$

由于在 φ 的定义域 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 内 $\cos \varphi$ 永远为正，则 $\cos \lambda$ 与 c_{31} 同号，则利用 c_{31} 与 λ_{\pm} 的正负号可在 λ 的定义域内确定经度的真值 λ ，参看图 2-2-4 可得：

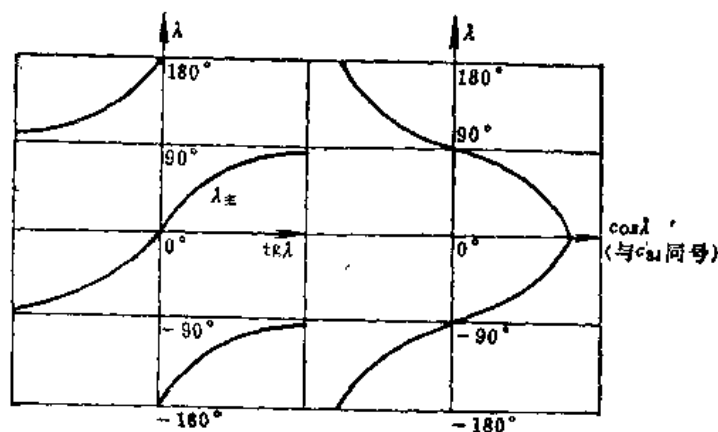


图2-2-4 经度的真值 λ 与 $\cos \lambda$ 的关系

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_{\pm} & \text{当 } c_{31} > 0 \text{ 时} \\ \lambda_{\pm} + 180^\circ & \text{当 } c_{31} < 0 \text{ 时} \\ \lambda_{\pm} - 180^\circ & \end{cases} \begin{cases} \lambda_{\pm} < 0 \text{ 时} \\ \lambda_{\pm} > 0 \end{cases} \quad (2-2-18)$$

由式 (2-2-18) 可通过计算机的软件程序算出经度的真值 λ 。

对于游动自由方位角 α ，同样有：

$$\alpha_{\pm} = \arctg(c_{13}/c_{23}) = \arctg(\sin \alpha \cos \varphi / \cos \alpha \cos \varphi)$$

显然 c_{23} 与 $\cos \alpha$ 同号, 图 2-2-5 表明了游动自由方位角的真值 α 与 $\cos \alpha$ 的关系。从图 2-2-5 可得:

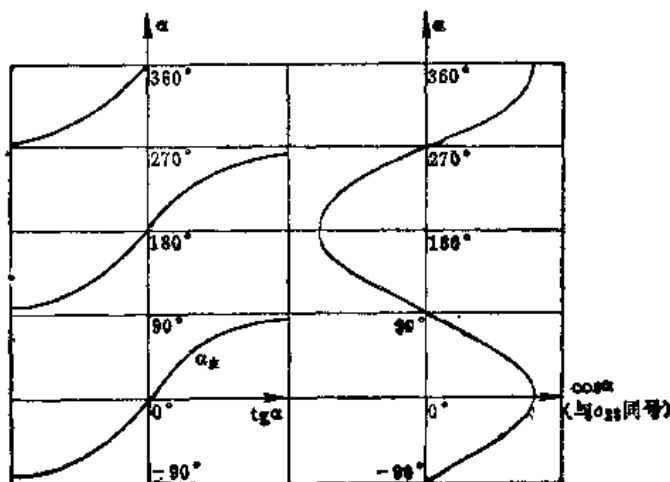


图 2-2-5 游动自由方位角 α 的真值与 $\cos \alpha$ 的关系

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{\pm} & \text{当 } c_{23} > 0 \\ \alpha_{\pm} + 360^\circ & \text{当 } c_{23} > 0 \\ \alpha_{\pm} + 180^\circ & \text{当 } c_{23} < 0 \end{cases} \begin{cases} c_{12} > 0 \\ c_{12} < 0 \end{cases} \quad (2-2-19)$$

根据式 (2-2-19) 可由计算机内软件程序计算出游动自由方位角的真值。

2. 位置矩阵 C_e^s 的即时修正

位置矩阵 C_e^s 的改变是由平台坐标系相对地球坐标系运动的角速率 (又称为位置速率) ω_{ep}^e 所引起的。参照式 (2-2-9) 可以类似地给出位置矩阵 C_e^s 的运动微分方程式:

$$\dot{C}_e^s = C_e^s \omega_{ep}^e \quad (2-2-20)$$

将式 (2-2-20) 展开写成矩阵形式有:

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ep}^{xz} & \omega_{ep}^{yz} \\ \omega_{ep}^{yz} & 0 & -\omega_{ep}^{xz} \\ -\omega_{ep}^{yz} & \omega_{ep}^{xz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2-2-21)$$

对于游动自由方位系统的式 (2-2-21) 中, $\omega_{ep}^{xz} = 0$, 于是式 (2-2-21) 可以简化为:

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_{ep}^{yz} \\ 0 & 0 & -\omega_{ep}^{yz} \\ -\omega_{ep}^{yz} & \omega_{ep}^{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2-2-22)$$

从式 (2-2-22) 可以明显地看出, 采用方向余弦的游动自由方位系统具有特殊的优点。

3. 位置速率

从上面的分析可以看出, 要求解方向余弦矩阵的微分方程式 (2-2-22) 需要提供位置速率 ω_{ep}^e 。它是由舰船的地速水平分量引起的, 通过惯性导航系统的方程式求得 \dot{V}_{ep}^{xz} 、 \dot{V}_{ep}^{yz} , 进行一次积分后可以得 V_{ep}^{xz} 、 V_{ep}^{yz} 。考虑到平台坐标系和地理坐标系之间相差一个游动自由方位角 α , 则通过坐标变换可以求得 V_{ep}^{ix} 、 V_{ep}^{iy} 。

$$\begin{bmatrix} V_{e1}^{i1} \\ V_{e2}^{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1}^{e1} \\ V_{e2}^{e1} \end{bmatrix} \quad (2-2-23)$$

当考虑到 $\omega_{e1}^{e1} = 0$, 则 ω_{e1}^{i1} 也可以表示成 ω_{e1}^{i1} .

$$\begin{bmatrix} \omega_{e1}^{i1} \\ \omega_{e2}^{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{e1}^{e1} \\ \omega_{e2}^{e1} \end{bmatrix} \quad (2-2-24)$$

考虑到舰船上地理坐标系的运动角速率是由舰船相对地球运动速度 V_{e1} 引起的, 故地理坐标系 (i 系) 相对地球坐标系 (e 系) 的角速率可写成:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{e1}^{i1} &= -V_{e1}^{i1}/R_{iy} \\ \omega_{e2}^{i1} &= V_{e1}^{i1}/R_{ix} \\ \omega_{e3}^{i1} &= (V_{e1}^{i1}/R_{ix}) \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-2-25)$$

将式 (2-2-23) 代入式 (2-2-25), 再代入式 (2-2-24), 可得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{e1}^{i1} \\ \omega_{e2}^{i1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{V_{e1}^{e1} \sin \alpha + V_{e2}^{e1} \cos \alpha}{R_{iy}} \\ \frac{V_{e1}^{e1} \cos \alpha - V_{e2}^{e1} \sin \alpha}{R_{ix}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_{iy}} - \frac{1}{R_{ix}}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\left(\frac{\cos^2 \alpha}{R_{iy}} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_{ix}}\right) \\ \frac{\sin^2 \alpha}{R_{iy}} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_{ix}} & \left(\frac{1}{R_{iy}} - \frac{1}{R_{ix}}\right) \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1}^{e1} \\ V_{e2}^{e1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-2-26)$$

◆

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{iy}} &= \frac{\cos^2 \alpha}{R_{iy}} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_{ix}} \\ \frac{1}{R_{ix}} &= \frac{\sin^2 \alpha}{R_{iy}} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_{ix}} \\ \frac{1}{\tau_a} &= \left(\frac{1}{R_{ix}} - \frac{1}{R_{iy}}\right) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-2-27)$$

式中 R_{ix} 、 R_{iy} 称为自由曲率半径, 当 $\alpha = 0$ 时, 即 $R_{ix} = R_{ix}$, $R_{iy} = R_{iy}$, $1/\tau_a$ 称为扭转挠率, 当 $\alpha = 0$ 时, $1/\tau_a = 0$ 。将式 (2-2-27) 代入式 (2-2-26), 得:

$$\begin{bmatrix} \omega_{e1}^{i1} \\ \omega_{e2}^{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_a} & -\frac{1}{R_{iy}} \\ \frac{1}{R_{ix}} & \frac{1}{\tau_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1}^{e1} \\ V_{e2}^{e1} \end{bmatrix} \quad (2-2-28)$$

由于位置矩阵 C_e^i 的元素可以在方向余弦矩阵的即时修正中获得, 而式 (2-2-27) 中的三角函数均可表示为方向余弦矩阵 C_e^i 中元素的函数关系, 这将使计算机中软件程序大大简化。

自由曲率半径 R_{ix} 、 R_{iy} 的计算。自由曲率半径有时又称主曲率半径。先求在地球子午面 NMS 内的主曲率半径 R_{px} , 如图 2-2-6 所示。

当曲线轨迹在当地子午面内时, 其几何图形如图 2-2-7 所示。图中 M 点的坐标为 (x_M, y_M) 椭圆的长轴为 R_x , 短轴为 R_y 。显然以 R_x 为半径的圆外切于椭圆, 以 R_y 为

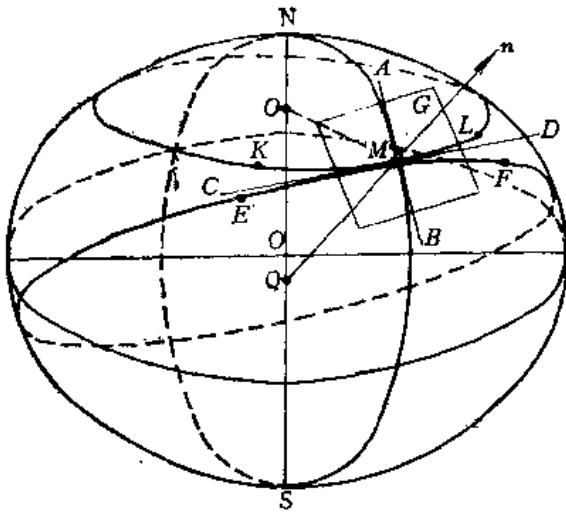


图2-2-6 地球表面上任意点M的主曲率半径

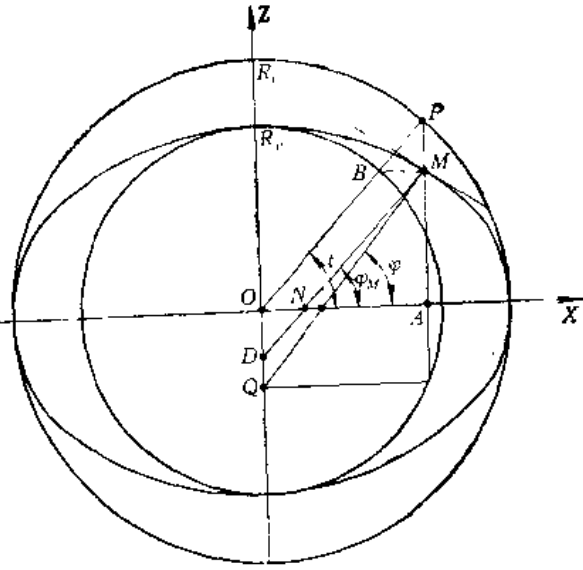


图2-2-7 曲线轨迹在当地子午面内的几何图形

半径的圆内切于椭圆，过点M长度为 R_e 的圆弧与Y轴交于D点，即 $MD=R_e$ ，椭圆在点M的法线与Y轴交于Q点。MD与X轴交于N点，它与X轴的夹角为 φ_M ，MQ与X轴的夹角为 φ ，角 φ 即是当地垂线与赤道平面的夹角，也就是前述定义的地理纬度。过点M作X轴的垂线，与半径为 R_e 的圆交于点P，与X轴交于点A。

由于点M满足椭圆方程，即有：

$$\frac{X_M^2}{R_e^2} + \frac{Y_M^2}{R_p^2} = 1 \quad (2-2-29)$$

从图2-2-7可见， $X_M=OA=OP\cos t=R_e\cos t$ ，将它代入式(2-2-29)，可得 $Y_M=MA=R_p\sin t$ 。这样，式(2-2-29)所表示的椭圆方程可以等效地表示成椭圆参数方程，即

$$\left. \begin{aligned} X_M &= R_e \cos t \\ Y_M &= R_p \sin t \end{aligned} \right\} \quad (2-2-30)$$

考虑到式 $e=(R_e-R_p)/R_e$ ，经简单变换可得：

$$R_p = R_e(1-e) \quad (2-2-31)$$

将式(2-2-31)代入式(2-2-30)可得：

$$\left. \begin{aligned} X_M &= R_e \cos t \\ Y_M &= R_e(1-e)\sin t \end{aligned} \right\} \quad (2-2-32)$$

从图2-2-7中得知，四边形PODM的一对边平行($PM//OD$)一对边相等($PO=MD=R_e$)，所以为平行四边形，于是 $MD//PO$ ，由此可知 $t=\varphi_M$ 。这样式(2-2-32)可以改写成：

$$\left. \begin{aligned} X_M &= R_e \cos \varphi_M \\ Y_M &= R_e(1-e)\sin \varphi_M \end{aligned} \right\} \quad (2-2-33)$$

椭圆在点M处的曲率半径 R_{py} 可表示为：

$$R_{\rho\rho} = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{\sqrt{dX_M^2 + dY_M^2}}{d\varphi} \quad (2-2-34)$$

式中 dS 为点 M 处椭圆曲线的微分, dX_M, dY_M 分别为 X 轴与 Y 轴的分量, 对式 (2-2-33) 求微分得:

$$\left. \begin{aligned} dX_M &= -R_e \sin\varphi_M d\varphi_M \\ dY_M &= R_e(1-e) \cos\varphi_M d\varphi_M \end{aligned} \right\} \quad (2-2-35)$$

因为 MQ 为椭圆在 M 点处的法线, 故有:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dX_M}{dY_M} = \frac{1}{(1-e)} \operatorname{tg} \varphi_M \quad (2-2-36)$$

略作变换有:

$$\operatorname{tg} \varphi_M = (1-e) \operatorname{tg} \varphi$$

于是有:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \varphi_M &= \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_M}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_M} = \frac{(1-e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + (1-e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \\ \cos^2 \varphi_M &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_M} = \frac{1}{1 + (1-e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-37)$$

将式 (2-2-36) 两边取微分, 得:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{1-e} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_M} d\varphi_M$$

将式 (2-2-37) 代入上式得:

$$d\varphi_M = \frac{1-e}{1 + (1-e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad (2-2-38)$$

将式 (2-2-35)、式 (2-2-37)、式 (2-2-38) 代入式 (2-2-34), 经整理后得:

$$R_{\rho\rho} = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{R_e(1-e)^2}{[\cos^2 \varphi + (1-e)^2 \sin^2 \varphi]^{3/2}} \quad (2-2-39)$$

将式 (2-2-39) 展开, 并略去二阶小量, 可求得一阶近似式:

$$\begin{aligned} R_{\rho\rho} &\approx R_e(1-2e)(1-2e \sin^2 \varphi)^{-3/2} \\ &\approx R_e(1-2e+3e \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (2-2-40)$$

或者改写为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\rho\rho}} &= \frac{[\cos^2 \varphi + (1-e)^2 \sin^2 \varphi]^{3/2}}{R_e(1-e)^2} \\ &\approx \frac{(1-2e \sin^2 \varphi)^{3/2}}{R_e(1-e)^2} \approx \frac{1}{R_e} (1+2e)(1-3e \sin^2 \varphi) \\ &\approx \frac{1}{R_e} (1+2e-3e \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (2-2-41)$$

既然椭球体是由椭圆旋转而成的, 那么平面 EMF 内的主曲率半径 $R_{\rho\rho} = MQ$ 。在图 2-2-7 的 $\triangle MDQ$ 中, 由正弦定理作简单的三角变换则有:

$$\frac{MQ}{\cos \varphi_M} = \frac{MD}{\cos \varphi}$$

$$\text{即 } R_{px} = MQ = MD \frac{\cos \varphi_M}{\cos \varphi} = R_s \frac{\cos \varphi_M}{\cos \varphi} \quad (2-2-42)$$

将式 (2-2-37) 中的 $\cos^2 \varphi_M$ 表达式代入式 (2-2-42), 得,

$$R_{px} = R_s \frac{1}{[\cos^2 \varphi + (1-e)^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}} \\ \approx R_s \frac{1}{[\cos^2 \varphi + (1-2e) \sin^2 \varphi]^{1/2}}$$

略去二阶小量, 可以求得 R_{px} 的一阶近似式,

$$R_{px} = R_s (1 + e \sin^2 \varphi) \quad (2-2-43)$$

或

$$\frac{1}{R_{px}} = \frac{1}{R_s} (1 - e \sin^2 \varphi) \quad (2-2-44)$$

由式 (2-2-15) 有,

$$\left. \begin{aligned} c_{13} &= \sin \alpha \cos \varphi \\ c_{23} &= \cos \alpha \cos \varphi \\ c_{33} &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-2-45)$$

将式 (2-2-45) 代入式 (2-2-44) 和式 (2-2-41), 有,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{py}} &= \frac{1}{R_s} (1 + 2e - 3e \sin^2 \varphi) = \frac{1}{R_s} (1 + 2e - 3e c_{13}^2) \\ \frac{1}{R_{pz}} &= \frac{1}{R_s} (1 - e \sin^2 \varphi) = \frac{1}{R_s} (1 - e c_{13}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2-2-46)$$

由式 (2-2-45) 可得,

$$\cos^2 \varphi = c_{13}^2 + c_{23}^2$$

进而可得,

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{c_{13}^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{c_{13}^2}{c_{13}^2 + c_{23}^2} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{c_{23}^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{c_{23}^2}{c_{13}^2 + c_{23}^2} \\ \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{c_{13} c_{23}}{\cos^2 \varphi} = \frac{c_{13} c_{23}}{c_{13}^2 + c_{23}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-47)$$

将式 (2-2-46)、式 (2-2-47) 代入式 (2-2-27), 经整理后得,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{px}} &= \frac{1}{R_s} (1 - e c_{13}^2 + 2e c_{13}^2) \\ \frac{1}{R_{py}} &= \frac{1}{R_s} (1 - e c_{13}^2 + 2e c_{13}^2) \\ \frac{1}{r_a} &= \frac{2e}{R_s} c_{13} c_{23} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-48)$$

4. 游动自由方位平台指令角速率 ω_{ip}^*

由于有

$$\omega_{ip}^* = \omega_{ie}^* + \omega_{ep}^*$$

将上式写成投影分量形式, 并将式 (2-2-45) 代入, 最后可得,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{i_p}^{p_x} &= \omega_{i_e} \cos \varphi \sin \alpha + \omega_{e_p}^{p_x} = \omega_{i_e} c_{13} + \omega_{e_p}^{p_x} \\ \omega_{i_p}^{p_y} &= \omega_{i_e} \cos \varphi \cos \alpha + \omega_{e_p}^{p_y} = \omega_{i_e} c_{23} + \omega_{e_p}^{p_y} \\ \omega_{i_p}^{p_z} &= \omega_{i_e} \sin \varphi = \omega_{i_e} c_{33} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-49)$$

对于平台式惯性导航系统, $\omega_{i_p}^p$ 是用来控制机电平台实体, 使之以给定的角速率转动; 对于捷联式惯性导航系统, $\omega_{i_p}^p$ 要输入导航计算机内的“数学解析平台”的软件程序中, 进行解析计算。

5. 游动自由方位的惯性导航系统基本方程

对于游动自由方位的惯性导航系统基本方程可以写成:

$$\dot{V}_{e_p}^p = S_p^p + g^p - (2\omega_{i_p}^p + \omega_{e_p}^p) \times V_{e_p}^p \quad (2-2-50)$$

式中

$$\begin{aligned} 2\omega_{i_p}^p + \omega_{e_p}^p &= 2C_{i_e}^p \omega_{i_e}^p + \omega_{e_p}^p \\ &= 2 \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{i_e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{e_p}^{p_x} \\ \omega_{e_p}^{p_y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega_{i_e} c_{13} + \omega_{e_p}^{p_x} \\ 2\omega_{i_e} c_{23} + \omega_{e_p}^{p_y} \\ 2\omega_{i_e} c_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-2-51)$$

将式 (2-2-51) 代入式 (2-2-50), 可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{e_p}^{p_x} \\ \dot{V}_{e_p}^{p_y} \\ \dot{V}_{e_p}^{p_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p^{p_x} \\ S_p^{p_y} \\ S_p^{p_z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2\omega_{i_e} c_{33} & 2\omega_{i_e} c_{23} + \omega_{e_p}^{p_x} \\ 2\omega_{i_e} c_{33} & 0 & -2(\omega_{i_e} c_{13} + \omega_{e_p}^{p_x}) \\ -(2\omega_{i_e} c_{23} + \omega_{e_p}^{p_x}) & 2\omega_{i_e} c_{13} + \omega_{e_p}^{p_x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e_p}^{p_x} \\ V_{e_p}^{p_y} \\ V_{e_p}^{p_z} \end{bmatrix} \quad (2-2-52)$$

进一步整理可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{e_p}^{p_x} &= S_p^{p_x} + 2\omega_{i_e} c_{33} V_{e_p}^{p_y} - (2\omega_{i_e} c_{23} + \omega_{e_p}^{p_x}) V_{e_p}^{p_z} \\ \dot{V}_{e_p}^{p_y} &= S_p^{p_y} - 2\omega_{i_e} c_{33} V_{e_p}^{p_x} + (2\omega_{i_e} c_{13} + \omega_{e_p}^{p_x}) V_{e_p}^{p_z} \\ \dot{V}_{e_p}^{p_z} &= S_p^{p_z} - g + (2\omega_{i_e} c_{23} + \omega_{e_p}^{p_x}) V_{e_p}^{p_x} - (2\omega_{i_e} c_{13} + \omega_{e_p}^{p_x}) V_{e_p}^{p_y} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-53)$$

式 (2-2-53) 是为了进一步精确计算而推导的。在作简化分析时, 特别是在考虑舰船导航时, 可以认为 $V_{e_p}^{p_z}$ 很小, 略去与它有关的项, 则可得到简化的惯性导航系统基本方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{e_p}^{p_x} &= S_p^{p_x} + 2\omega_{i_e} c_{33} V_{e_p}^{p_y} \\ \dot{V}_{e_p}^{p_y} &= S_p^{p_y} - 2\omega_{i_e} c_{33} V_{e_p}^{p_x} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-54)$$

综上所述, 最后可以画出采用方向余弦法的游动自由方位惯性导航系统原理方块图, 如图 2-2-8 所示。

从本节的讨论可以看出, 当采用方向余弦法进行导航计算时, 全部导航计算都可以化成代数运算, 所有的三角函数均由方向余弦矩阵 $C_{i_e}^p$ 中的元素代数运算来表示, 而 $C_{i_e}^p$ 的元素又可以在即时修正中获得, 不必计算出 φ 、 α 以后再获得, 从而可以大大减少计算量并提高了计算精度。采用方向余弦法时, 由于游动自由方位惯性导航系统中 $\omega_{e_p}^{p_z} = 0$, 所以就更有优越性, 因此目前的捷联式惯性导航系统中较多地采用游动自由方位类型。

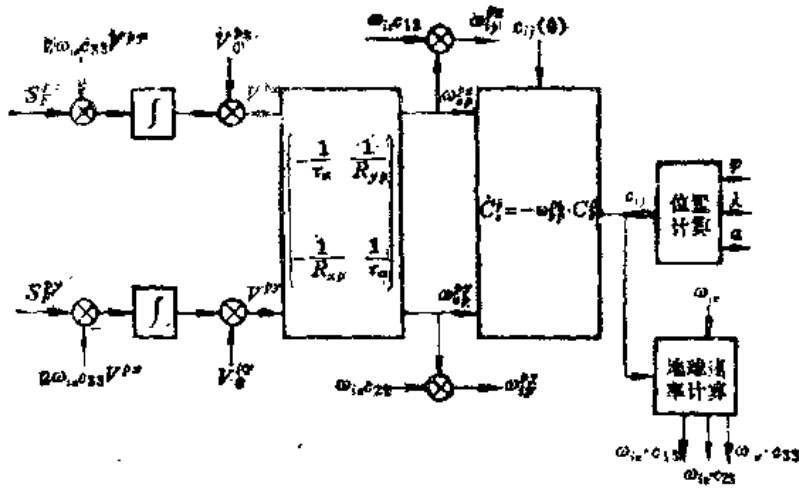


图2-2-8 采用方向余弦的游动自由方位惯性导航系统原理方块图

§ 2.3 自由方位坐标系的捷联式惯性导航系统

自由方位坐标系是和游动自由方位坐标系相类似的另一种地平坐标系。这种坐标系的 OXY 平面也保持在水平面内，但它绕垂直轴相对惯性空间不转动。选取平台坐标系时，取

$$\omega_{i0}^{p0} = 0$$

称此平台坐标系为自由方位坐标系。该地平坐标系既不跟踪舰船的运动，也不跟踪地球的转动，它绕垂直轴相对惯性空间的角速度为零。这样控制平台绕 OZ_p 轴转动的陀螺仪就不需要再加力矩，从而克服了指北方位系统在极区附近使用的困难。然而由于平台相对惯性空间绕 OZ_p 轴不转动，则平台相对地理坐标系就存在着表观运动，即不再指北，而与 OY_i 轴之间存在着自由方位角 α ，如图 2-2-1 所示。

仿照指北方位系统的惯性导航原理，我们可以求出平台坐标系相对惯性坐标系的角速度分量。沿平台轴测量的比力可以通过由自由方位角构成的方向余弦矩阵转换为沿地理坐标系轴向的比力分量，进而便可以进行导航参数计算。自由方位坐标系的惯性导航原理方块图如图 2-2-2 所示。

设自由方位平台坐标系 OX_p, Y_p, Z_p 和地理坐标系 OX_i, Y_i, Z_i 的垂直轴 OZ_p 和 OZ_i 重合， X_i, OY_i 和 X_p, OY_p 均处于地平面(当地水平面)内，但它们的水平轴之间有一个自由方位角 α ，角 α 仍然是一个时间函数，由此不难求出自由方位平台相对惯性空间的角速率分量如下：

$$\begin{bmatrix} \omega_{i0}^{p0} \\ \omega_{i0}^{p0} \\ \omega_{i0}^{p0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i0}^{i0} \\ \omega_{i0}^{i0} \\ \omega_{i0}^{i0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} \quad (2-3-1)$$

对于自由方位平台的要求是 $\omega_{i0}^{p0} = 0$ ，所以有： $\omega_{i0}^{i0} + \dot{\alpha}(t) = 0$ ，那么

$$\dot{\alpha}(t) = -\omega_{i0}^{i0} = -\left(\omega_{i0} \sin \varphi + \frac{V_{e0}^{i0}}{R_{e0}} + g\varphi\right)$$

$$\alpha(t) = \alpha(0) - \int_0^t \left(\omega_{ie} \sin \varphi + \frac{V_{eb}^{ix}}{R_{er}} \operatorname{tg} \varphi \right) dt \quad (2-3-2)$$

由式(2-3-2)可清楚看到,自由方位角 $\alpha(t)$ 为任意角度,它是纬度和航行速度的函数。为了保持平台在当地水平面内,对于平台式惯性导航系统,可给出相应的指令角速率控制平台旋转。

$$\begin{bmatrix} \omega_{ip}^{ox} \\ \omega_{ip}^{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{ir}^{ox} \\ \omega_{ir}^{oy} \end{bmatrix} \quad (2-3-3)$$

对于捷联式惯性导航系统,则要将 ω_{ip}^{ox} 送至捷联导航计算机的“数学解析平台”软件程序中去。和游动自由方位系统相比较可知,自由方位系统要求 $\omega_{ip}^{ox} = 0$,而不是 $\omega_{ip}^{oy} = 0$ 。从式(2-2-21)与式(2-2-22)比较来看,显然自由方位捷联式惯性导航系统要比游动自由方位捷联式惯性导航系统在方向余弦矩阵 C_e^p 的即时修正方面要复杂得多,这里不再详细分析。

通过前三节的介绍,可以发现自由方位捷联式惯性导航系统和游动自由方位捷联式惯性导航系统主要区别就在于它们的方位轴的控制指令角速率不同,前者 $\omega_{ip}^{ox} = 0$,后者 $\omega_{ip}^{ox} = \omega_{ie} \sin \varphi$,这一点一定要从空间上建立起明确的概念。而指北方位捷联式惯性导航系统的平台方位轴控制指令角速率除了地球角速率垂直分量 $\omega_{ie} \sin \varphi$ 之外,还要加入舰船运动引起的位置角速率分量 $\omega_{ie}^{ix} = \frac{V_{eb}^{ix}}{R_{er}} \operatorname{tg} \varphi$,也就是:

$$\omega_{ip}^{ox} = \omega_{ir}^{ox} = \omega_{ie} \sin \varphi + \frac{V_{eb}^{ix}}{R_{er}} \operatorname{tg} \varphi$$

从上述观点来看,可以认为游动自由方位捷联式惯性导航系统是介于自由方位捷联式惯性导航系统与指北方位捷联式惯性导航系统之间的一种系统。

§ 2.4 地理坐标系的捷联式惯性导航系统

在地球表面航行的舰船上,多数采用地平坐标系作为导航坐标系(又称动参考坐标系)。地平坐标系中最典型的是地理坐标系,也就是让导航平台坐标系 Ox_p, Y_p, Z_p 与地理坐标系 Ox, Y, Z 重合,所以有时也将用地理坐标系的捷联式惯性导航系统称为指北方位系统。地理坐标系的平台式惯性导航系统如图2-4-1所示,地理坐标系捷联式惯性导航系统原现示意图如图2-4-2所示。

先用固接于船体的陀螺仪组件测得角速度 ω_{ip}^{ox} 和导航计算机计算得到的角速度 ω_{ip}^{oy} ,求得姿态矩阵 T_p^i ,然后从姿态矩阵的元素中提取舰船姿态角 H, ψ, θ 的大小,并把固接于船体的加速度计组测得的比力信息 S_p^i 用姿态矩阵 T_p^i 变换到地理坐标系上,从而得到 S_e^i 并用此进行导航参数计算。

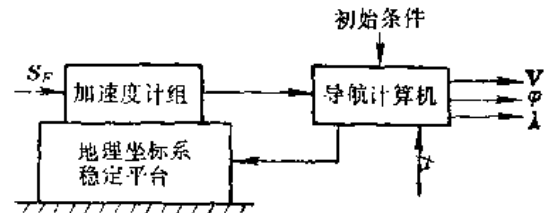


图2-4-1 地理坐标系的平台式惯性导航系统示意图

对于指北方位系统,选取平台坐标系 Ox_p, Y_p, Z_p 作为导航参数计算用的动参考坐标系 Ox_m, Y_m, Z_m ,并与地理坐标系 Ox, Y, Z 相重合,因此平台坐标系一轴 OY_p 始终指北,

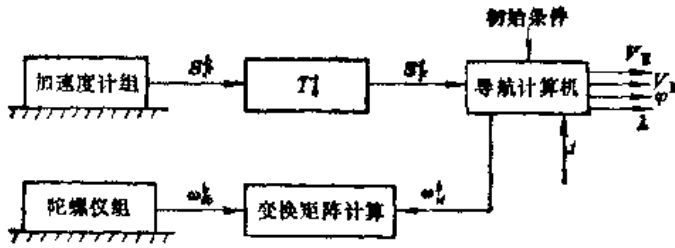


图2-4-2 地理坐标系的捷联式惯性导航系统示意图

该指北方位系统的平台坐标系的取法如图 2-4-3 所示。本图将地球画为圆球体，事实上地球如前所述是一个椭球体。当舰船沿北向航行时，即在子午面内航行，这时该主曲率半径为 R_N ，而当舰船沿东向航行时，此时舰船在与子午面垂直的平面内运动，此时该主曲率半径为 R_E 。对于一个椭球体来讲，在地球表面的不同位置 and 不同方向上，曲率半径显然是不同的。子午面的曲率半径 $R_N = R_{N_y} = R_{N_z}$ ，面与子午面垂直的法线平面的曲率半径 $R_E = R_{E_x} = R_{E_z}$ ，其计算按式 (2-2-40) 与式 (2-2-43) 进行。

$$R_N = R_{N_y} = R_{N_z} = R_e (1 - 2e + 3e \sin^2 \varphi)$$

$$R_E = R_{E_x} = R_{E_z} = R_e (1 + e \sin^2 \varphi)$$

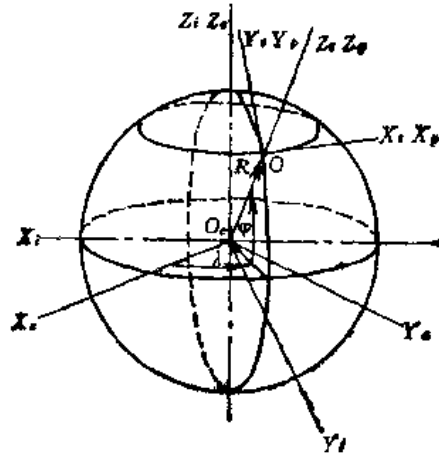


图2-4-3 指北方位系统的平台坐标系

对于指北方位系统，平台总要跟踪地理坐标

系，平台式惯性导航系统应在陀螺仪上施加力矩，使常平架式的稳定平台跟踪地理坐标系。而对于捷联式惯性导航系统，则应把在舰船上建立的地理坐标系的转动角速率实时地送至导航计算机中的“数学解析平台”软件程序中。因此也要实时计算流动地理坐标系的角速度。从图 2-4-3 中可以求得由地球转动引起的地理坐标系的角速度，写成三个分量形式为：

$$\left. \begin{aligned} \omega_{i_e}^{i_e} &= 0 \\ \omega_{i_e}^{i_y} &= \omega_{i_e} \cos \varphi \\ \omega_{i_e}^{i_z} &= \omega_{i_e} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-4-1)$$

由于舰船的运动引起的地理坐标系相对地球坐标系的角速度的三个分量为：

$$\left. \begin{aligned} \omega_{i_e}^{i_x} &= -V_{i_e}^{i_x} / R_{N_y} \\ \omega_{i_e}^{i_y} &= V_{i_e}^{i_y} / R_{E_x} \\ \omega_{i_e}^{i_z} &= V_{i_e}^{i_z} \operatorname{tg} \varphi / R_{E_x} \end{aligned} \right\} \quad (2-4-2)$$

将式 (2-4-1) 与式 (2-4-2) 求和可得：

$$\left. \begin{aligned} \omega_{i_e}^{i_x} &= -V_{i_e}^{i_x} / R_{N_y} \\ \omega_{i_e}^{i_y} &= \omega_{i_e} \cos \varphi + V_{i_e}^{i_y} / R_{E_x} \\ \omega_{i_e}^{i_z} &= \omega_{i_e} \sin \varphi + V_{i_e}^{i_z} \operatorname{tg} \varphi / R_{E_x} \end{aligned} \right\} \quad (2-4-3)$$

式 (2-4-3) 表明了指北方位系统中平台的跟踪角速率；式 (2-4-4) 是指北方位系统的惯性导航基本方程：

$$V_{e_i} = S_F^i + g - (2\omega_{j_i} + \omega_{i_i}^i) \times V_{e_i} \quad (2-4-4)$$

为将式(2-4-4)写成投影形式,可先来分析该方程中出现的矢量叉乘积用矩阵形式来表示。

设有两个矢量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 同时表示在同一坐标系 $OXYZ$ 中的投影形式, \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 为对应坐标轴 OX 、 OY 、 OZ 的单位矢量。

$$\text{令} \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2-4-5)$$

则有:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} \\ \mathbf{c} &= c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-4-6)$$

将式(2-4-6)代入式(2-4-5)经简单整理后有:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \\ &= c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

将上述式子写成矩阵形式为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_x & a_y \\ a_x & 0 & -a_z \\ -a_y & a_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & -b_x & b_y \\ b_x & 0 & -b_z \\ -b_y & b_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-2-7)$$

其中 $\mathbf{a} \times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_x & a_y \\ a_x & 0 & -a_z \\ -a_y & a_z & 0 \end{bmatrix}$ 称为 \mathbf{a} 的反对称矩阵,简记为 $\mathbf{a} \times$ 。

利用式(2-2-7)可以类似地将式(2-4-4)展开写成投影形式为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{e_i}^{i^i} &= S_F^{i^i} + \left(2\omega_{i_e} \sin \varphi + \frac{V_{e_i}^{i^i}}{R_{e_i}} \operatorname{tg} \varphi \right) V_{e_i}^{i^i} - \left(2\omega_{i_e} \cos \varphi + \frac{V_{e_i}^{i^i}}{R_{e_i}} \right) V_{e_i}^{i^i} \\ \dot{V}_{e_i}^{i^j} &= S_F^{i^j} - \left(2\omega_{i_e} \sin \varphi + \frac{V_{e_i}^{i^i}}{R_{e_i}} \operatorname{tg} \varphi \right) V_{e_i}^{i^j} - \frac{V_{e_i}^{i^j}}{R_{e_j}} V_{e_i}^{i^j} \\ \dot{V}_{e_i}^{i^z} &= S_F^{i^z} + \left(2\omega_{i_e} \cos \varphi + \frac{V_{e_i}^{i^i}}{R_{e_i}} \right) V_{e_i}^{i^z} - \frac{V_{e_i}^{i^j}}{R_{e_j}} V_{e_i}^{i^z} - g \end{aligned} \right\} \quad (2-4-8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_i^{i^i} &= - \left(2\omega_{i_e} \sin \varphi + \frac{V_{e_i}^{i^i}}{R_{e_i}} \operatorname{tg} \varphi \right) V_{e_i}^{i^j} + \left(2\omega_{i_e} \cos \varphi + \frac{V_{e_i}^{i^i}}{R_{e_i}} \right) V_{e_i}^{i^z} \\ \mathbf{a}_i^{i^j} &= \left(2\omega_{i_e} \sin \varphi + \frac{V_{e_i}^{i^i}}{R_{e_i}} \operatorname{tg} \varphi \right) V_{e_i}^{i^i} + \frac{V_{e_i}^{i^j}}{R_{e_j}} V_{e_i}^{i^i} \\ \mathbf{a}_i^{i^z} &= - \left(2\omega_{i_e} \cos \varphi + \frac{V_{e_i}^{i^i}}{R_{e_i}} \right) V_{e_i}^{i^i} + \frac{V_{e_i}^{i^j}}{R_{e_j}} V_{e_i}^{i^j} \end{aligned} \right\} \quad (2-4-9)$$

式(2-4-9)表示了为进行导航计算所必须消除的有害加速度分量。式(2-4-8)中 $S_F^{i^i}$ 、 $S_F^{i^j}$ 、 $S_F^{i^z}$ 为比力 S_F 在地理坐标系上的三个投影。对于平台式惯性导航系统,它可以通

过沿平台轴由安装三个加速度计直接测得；对于捷联式惯性导航系统，沿舰船载体坐标系安装三个加速度计测得的沿舰船坐标系分量的比力分量 $S_x^{b^2}$ 、 $S_y^{b^2}$ 、 $S_z^{b^2}$ 需经过坐标变换后才能获得 S_x^r 、 S_y^r 、 S_z^r 。按式 (2-4-8) 确定的加速度表达式后，再参照第一章所介绍的基本原则按下列一组式子可求得舰船的导航参数。

$$\left. \begin{aligned} V_x^r &= V_x^r(0) + \int_0^t V_x^{r^2} dt \\ V_y^r &= V_y^r(0) + \int_0^t V_y^{r^2} dt \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{1}{R_{xy}} \int_0^t V_x^{r^2} dt \\ \lambda &= \lambda_0 + \frac{1}{R_{xz}} \int_0^t \frac{1}{\cos \varphi} V_x^{r^2} dt \end{aligned} \right\} (2-4-10)$$

图 2-4-4 表明了指北方位系统的惯性导航系统原理方块图。

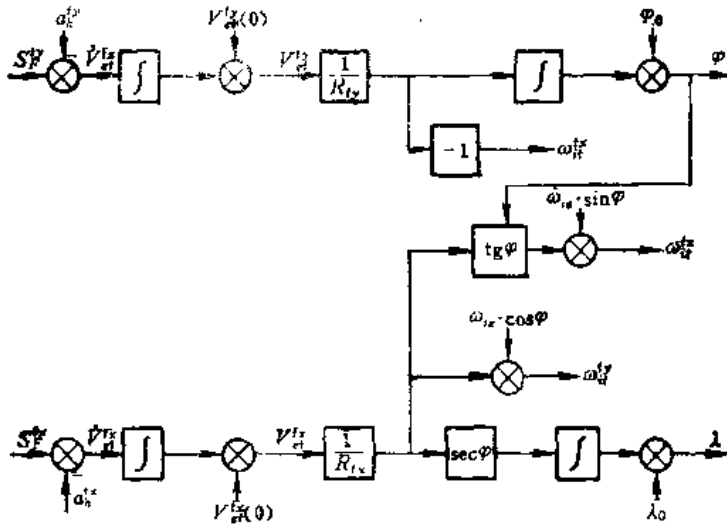


图2-4-4 指北方位系统原理方块图

采用指北方位系统进行舰船导航时，由于平台要跟踪正北方向，若在极区航行，方位变化较快，因此平台应具有较快的跟踪角速度。对于平台式惯性导航系统，则要求陀螺仪应有较大的力矩器系数，这就造成了硬件上的困难。对于捷联式惯性导航系统，较快的姿态角变化速率要求计算机有更快的计算速度，否则会大大降低计算精度，这对导航用的捷联系统中的计算机来讲显然是不易达到的。所以说，指北方位系统是不适于在极区附近使用的。为此，可以转换为前几节介绍的其他类型捷联式系统与之配合。

§ 2.5 用新型陀螺仪的捷联式惯性导航系统

一、用静电陀螺仪的捷联式系统

静电陀螺是指在超高真空的环境中，利用静电力支承起来的高速旋转的球形转子。由于它具有超高真空的条件、无接触的静电支承和光电读取系统，一个理想球面的转子

构成一个理想的自由陀螺，从而使静电陀螺有可能达到极高的精度和稳定性，这些对于常规陀螺是不易达到的，更主要的是它的球形转子相对外壳可以任意转动，转角不受限制，所以说静电陀螺是一种位置陀螺，它可以直接测量舰船坐标系相对惯性坐标系的角位置。当读取刻线为余弦刻线时，则读取系统可以直接给出舰船坐标系相对惯性坐标系的姿态角的三角函数值，由此可以直接构成变换矩阵 C_b^i 。

有了变换矩阵 C_b^i 之后，其他的导航计算则完全可以利用本章第一节叙述的用惯性坐标系的捷联式惯性导航系统相同的算法，其软件程序编排如图 2-5-1 所示。

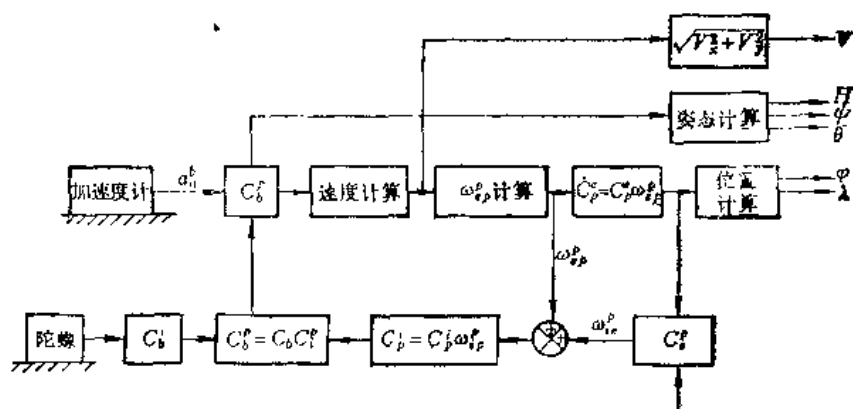


图2-5-1 用静电陀螺仪的捷联式惯导系统程序编排

二、用环形激光陀螺仪的捷联式惯导系统

现有的惯性敏感器——陀螺仪和加速度计能够提供各种应用要求的精度和动态范围，常规的机械转子陀螺仪已被用于捷联系统，然而非常规的新型固态惯性器件——光学陀螺特别适合捷联系统。

光学陀螺是一种不用外部参考系而用萨格奈克 (Sagnac) 效应的光学方法来敏感测量旋转体的旋转角速度的新型固态惯性器件。光学陀螺的共同基础是萨格奈克效应。本世纪初，萨格奈克研究了在环形干涉仪中沿相反方向传播的两束相干光束的干涉特性，并发现当所研究的干涉仪以角速度 Ω 旋转时，此两束光束的光程差 ΔL 与 Ω 成正比。这种现象称为萨格奈克效应。它是当今人们用光学方法来测量旋转角速率的基础。但是，由于受当时科学技术发展水平的限制，在激光出现之前，这一原理一直未能得到实际应用。1960 年激光出现之后，次年就披露了美国对环形激光陀螺的研究。1963 年斯佩里 (Sperry) 公司激光陀螺的研究取得了突破性的进展，首先在实验室里论证了激光陀螺。此后，人们经过近 20 年的奋斗，工业界投入了总数远超过 1 亿美元的资金，终于使惯导级环形激光陀螺仪进入实用化。1981 年霍尼韦尔 (Honeywell) 公司研制出的 GG1342 型环形激光陀螺，并于 1983 年用于波音 757 和 767 新型客机的机载捷联惯性导航系统。接着美国海军就探索 90 年代及以后它们在全球海洋中所起的战略作用，指出那些新武器系统，新型潜艇和作战部队都必须使用一种更精确、更可靠的导航手段，即提出了研制船用激光陀螺导航仪的发展计划，使环形激光陀螺早日适用于海上环境条件。又据 1990 年 6 月北大西洋公约 16 个国家组织的有关资料报道，北大西洋公约国家为满足舰船惯性导航系统要求，已和弗伦梯防御有限公司和斯佩航海有限公司签订了三

千万美元的研制舰船及潜艇用环形激光陀螺的惯性导航系统的订货合同。在目前高精度陀螺仪应用领域里，环形激光陀螺仪是其他陀螺仪无法与之竞争的。

早在本世纪初，米切尔森 (Michelson) 就指出了利用电磁效应观测物体绝对旋转运动的可能性，但直到 1913 年萨格奈克才用实验论证了电磁波与旋转角速度之间的关系。萨格奈克所用的实验装置如图 2-5-2 所示。由光源 C 发出的光经 N 准直后，再用反射镜 m 反射到半反透镜 S ，分成两束。然后用反射镜 M_1 、 M_2 、 M_3 和 M_4 使这两束光沿相反方向绕同一闭合环路传播。最后，由半透镜使这两束光合束，并产生干涉。整个装置被安装在一个可旋转的平台上。萨格奈克发现，当此环形干涉仪随着平台以角速度 Ω 旋转时，干涉条纹相对静止时的移动量 ΔZ 为：

$$\Delta Z = \frac{4}{\lambda c} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2-5-1)$$

式中 S ——该干涉仪所包围的面积矢量，
 Ω ——旋转角速度矢量，
 c ——光速，
 λ ——真空中光波长。

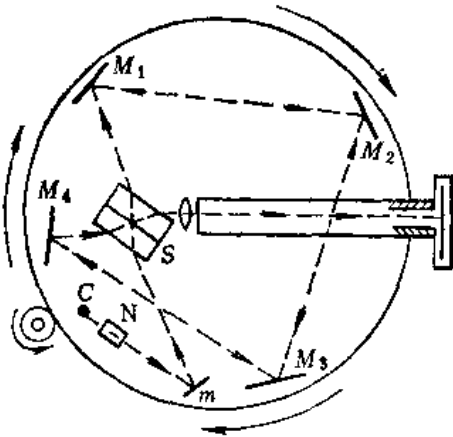


图2-5-2 萨格奈克原始实验装置示意图
 虚线表示光线，箭头表示光线传播方向。

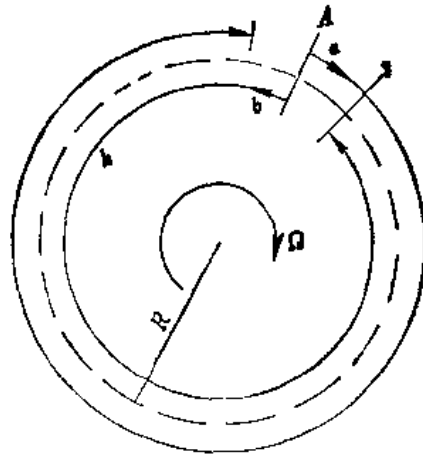


图2-5-3 简化萨格奈克环形干涉仪

标积 $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ 表示 ΔZ 正比于旋转轴与光学环路所在平面的法线之间夹角的余弦。与 ΔZ 相对应的光程差为：

$$\Delta L = \frac{4}{c} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2-5-2)$$

当环形干涉仪绕其所在平面的法线旋转时，式 (2-5-2) 可化简为：

$$\Delta L = \frac{4S}{c} \Omega \quad (2-5-3)$$

式中， S 和 Ω 分别表示矢量 \mathbf{S} 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的大小。在以下的叙述中，我们都认为环形干涉仪是绕其自身平面法线旋转的，故都用标量形式表示。

在理论上，利用广义相对论，可严格地推导出萨格奈克公式 (2-5-3)。但是，为了避免冗长的数学推导，我们可利用图 2-5-3 所示的圆形光波导来证明此公式。设圆形光波导的半径为 R ，在截面 A 处耦合入沿顺时针方向传播的光束 a 和沿逆时针方向传播的

光束 b ，它们的传播速度分别记为 c_a 和 c_b 。当此圆形光波导处于静止状态时，光束 a 和光束 b 的传播速度相等，即 $c_a = c_b = c$ ，它们在时间 t 为 $2\pi R/c$ 时刻以不同的方向同时回到 A 处，所以此时它们的光束差 $\Delta L = 0$ 。

当圆形光波导以角速度 Ω 绕垂直于波导平面的轴旋转时，光束 a 和光束 b 的传播速度不相等，设其传播速度分别为 c'_a 和 c'_b ，则根据速度合成定理有：

$$c'_a = c_a - R\Omega, \quad c'_b = c_b + R\Omega \quad (2-5-4)$$

它们绕该波导传播一周所需时间分别为：

$$\left. \begin{aligned} t_a &= 2\pi R / (c_a - R\Omega) \\ t_b &= 2\pi R / (c_b + R\Omega) \end{aligned} \right\} \quad (2-5-5)$$

式 (2-5-5) 表明，在以角速度 Ω 旋转着的圆形光波导内，光束沿顺、逆时针方向传播的速度是不相等的，它们沿该波导传播一周所需时间不再相等，它们的时间差为：

$$\Delta t = t_a - t_b = 2\pi R \frac{[2R\Omega - (c_a - c_b)]}{(c_a - R\Omega)(c_b + R\Omega)} \quad (2-5-6)$$

与 Δt 相对应的光程差为：

$$\Delta L = \Delta t \cdot c \quad (2-5-7)$$

下面分别讨论真空波导与介质波导的情况。

(1) 环形真空光波导中的萨格奈克效应

假设上述讨论的圆形光波导是真空的，根据爱因斯坦速度不变的原理，有：

$$c_a = c_b = c \quad (2-5-8)$$

将式 (2-5-8) 代入式 (2-5-6) 得：

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2}{c^2} \Omega = \frac{4S}{c^2} \Omega \quad (2-5-9)$$

因此，在以角速度 Ω 旋转着的圆形光波导中，沿相反方向传播的两束光束的光程差为：

$$\Delta L = \Delta t c = \frac{4S}{c} \Omega \quad (2-5-10)$$

(2) 环形介质光波导中的萨格奈克效应

当图 2-5-3 所示的是折射率为 n 的介质光波导时，必须对光速进行爱因斯坦修正。根据爱因斯坦速度相加原理可得：

$$c_a = (c/n + R\Omega) / (1 + R\Omega/nc)$$

$$c_b = (c/n - R\Omega) / (1 - R\Omega/nc)$$

因为， $R\Omega \ll c$ ，故上式可作一阶近似，有：

$$c_a = \frac{c}{n} + R\Omega \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (2-5-11)$$

$$c_b = \frac{c}{n} - R\Omega \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

把式 (2-5-11) 代入式 (2-5-6)，并作一阶近似，有：

$$\Delta t = \frac{4S}{c^2} \Omega$$

所以，在以角速度 Ω 旋转着的圆形介质光波导中，沿相反方向传播的两束光束的光程差为：

$$\Delta L = -\frac{4S}{c}\Omega \quad (2-5-12)$$

式(2-5-10)和式(2-5-12)表明，介质中的萨格奈克效应和真空中萨格奈克效应是一致的。所以说利用萨格奈克环形干涉仪所产生的萨格奈克效应，只要能测量出光程差 ΔL 就能确定环形光路相对于惯性空间的旋转角速率，然而，由此所产生的萨格奈克效应得到的光程差是十分小的。例如1925年米切尔森和卡尔(Gale)利用一个 $600 \times 300\text{m}$ 的巨大的环形干涉仪成功地证明了地球的自转效应。虽然如此，由于地球旋转所引起的在这个巨大的环形干涉仪中沿顺、逆时针方向传播的光束之间的光程差也仅有 $0.18\mu\text{m}$ 。因此，用这种方法来敏感旋转角速率的灵敏度是非常低的，这也就是在激光出现以前，萨格奈克效应没有得到实际应用的根本原因之一。

环形激光陀螺(RLG)的原理结构如图2-5-4所示。它由低损耗环形激光腔、光探测器和信号处理系统构成。通常激光腔是用机械加工的方法在整块石英基体上加工成的三角形光波导，在其中填充激光物质并装上多层介质膜的高反射镜及激励电极。为使陀螺仪具有必要的刚度，用分子法把反射镜按一定角度固定在激光腔上，其粘着面必须精磨抛光到 $0.1\mu\text{m}$ 的高精度。最后把激光腔抽成真空，再充以一定压力的工作气体。为得到短工作波长，大都采用He-Ne混合气体作为激光物质。在腔体上还装有一个阴极和两个阳极，把高频电压或直流高压加到阴极与阳极上，以激励激光。当激光增益超过其损耗时，将产生激光谐振。

在环形激光腔中，由于阴极与两个阳极形成三角形的结构，使之能产生沿相反方向传播的激光束。其中一束沿顺时针方向，另一束沿逆时针方向。它们的波长由振荡条件确定，当激光腔产生谐振时，激光腔的周长 L 应为谐振波长 λ 的整数倍，即

$$L = N\lambda \quad (2-5-13)$$

式中 N ——正整数。

而振荡频率 F 与振荡波长 λ 满足关系式：

$$F = \frac{c}{\lambda} \quad (2-5-14)$$

由式(2-5-13)和式(2-5-14)可求得：

$$F = N \frac{c}{L} \quad (2-5-15)$$

若把顺时针和逆时针传播光束的光程和谐振频率分别记为 L_s 、 L_a 和 F_s 、 F_a ，则有：

$$F_s = N \frac{c}{L_s}$$

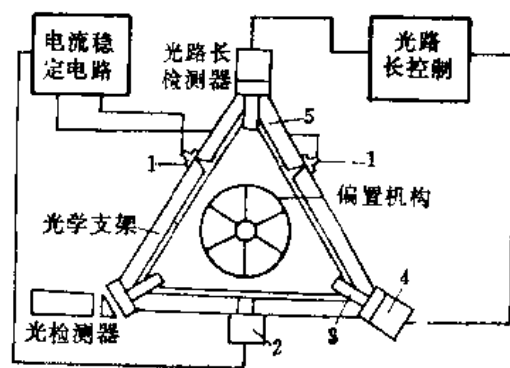


图2-5-4 环形激光陀螺原理图

1—阳极；2—阴极；3—反射镜；4—光路控制用致动器；5—激光腔。

$$F_b = N \frac{c}{L_b} \quad (2-5-16)$$

于是

$$F_a - F_b = \frac{Nc(L_a - L_b)}{L_a L_b} \quad (2-5-17)$$

当环形激光器旋转时，在相反方向传播的每一光波产生一段有相反符号的有效光程差 $\Delta L'$ ，则有：

$$\begin{aligned} L_a &= L + \Delta L' \\ L_b &= L - \Delta L' \end{aligned}$$

把此二式代入式 (2-5-17) 可得：

$$\Delta F = \frac{2Nc\Delta L'}{L^2 - (\Delta L')^2}$$

略去二阶小量 $(\Delta L')^2$ ，并利用式 (2-5-15) 得：

$$\Delta F = F \frac{2\Delta L'}{L} \quad (2-5-18)$$

由上述分析可见， $L_a - L_b = 2\Delta L' = \Delta L$ 。这样，利用式 (2-5-10) 与式 (2-5-18) 可得：

$$\Delta F = \frac{4S}{\lambda L} \Omega \quad (2-5-19)$$

式 (2-5-19) 表明，在以角速度 Ω 旋转着的环形激光谐振腔中，沿相反方向传播的两束谐振激光束之间的频率差与旋转角速度 Ω 成正比。因此，只要能测出反向行波的频差 ΔF 就能确定 Ω 。为此再用半反射镜 M 把反向行波引出腔外，通过合束棱镜产生合束干涉，然后投射到光电探测器，把含有 Ω 信息的光信号转换为电信号，最后经信号处理系统，便得到要测量的角速度 Ω 。

由式 (2-5-19) 与式 (2-5-10) 相比较可见，旋转着的环形激光谐振腔把在其中沿反方向传播的光波的光程差转化为频率差。因为在数值上，分母中的光波长 λ 远远小于光速 c ，所以大大地提高了敏感角速度的灵敏度。

环形激光陀螺与机械陀螺相比较，有本质的区别。机械陀螺尽管结构上千变万化，但在原理上都足力学敏感来测量的，而环形激光陀螺则是用光学原理来敏感测量角速率，因而，它具有一系列突出优点：

(1) 激光陀螺没有旋转的转子、轴承或其他与摩擦有关的机械运动部件，结构简单、全固体化。因此它的可靠性高、寿命长、耐冲击震动、抗加速度性能好；

(2) 理论上，环形激光陀螺测量角速度的能力几乎是无止境的，因此它的动态范围大；

(3) 由于激光陀螺无机运动部分，因此它的起动时间十分短，具有几乎即时起动的能力；

(4) 激光陀螺的敏感轴垂直于环形谐振腔平面，对其他正交轴的旋转角速率、角加速度及线加速度均不敏感，因此其噪声小、灵敏度高；

(5) 无质量不平衡问题；

(6) 数字脉冲输出，便于与计算机接口。

由于环形激光陀螺具有上述优点，特别适用于高精度的捷联式惯性导航系统。据有关资料报道，用环形激光陀螺仪构成的捷联系统的定位精度优于 0.1nmile/h 。

当然环形激光陀螺也并非十全十美，尚存在一些需要解决的问题。例如：自锁效应；高性能与高成本的矛盾；高性能与小型化的矛盾；零点漂移等等。环形激光陀螺的性能改善有待于反射镜性能的进一步提高，即提高其反射率同时要减小其散射系数，要改善环形激光陀螺的温度性能，还必须进一步减小制造腔体材料的温度系数。随着光纤陀螺技术的进步，到本世纪末 21 世纪初，环形激光陀螺将面临着光纤陀螺的严重挑战。

三、用光纤陀螺仪的捷联式惯导系统

1976 年 5 月，美国犹他大学 V. 瓦利和 R. W. 肖特希尔两位学者以“快讯”形式在《实用光学》上发表了《光纤环形干涉》一文，第一次提出了光纤陀螺仪的概念。在这些年中由于世界上许多科学家和工程师的努力，光纤陀螺的发展很快。它是纤维光学和激光技术发展的必然产物。从第一个光纤陀螺的实验论证至今也只不过 15 年左右的时间，但它已跨出实验室，走向实用化。飞机用的惯性基准参考系统光纤陀螺已实用化，惯导级光纤陀螺也将在今后 3 ~ 5 年内趋于实用化，其发展之所以如此迅速，主要是因为它具有许多其他陀螺所没有的潜在优点和竞争能力。

光纤陀螺 (FOG) 在原理上，与环形激光陀螺一样，都是利用萨格奈克效应来敏感测量旋转物体的角速度，最简单的光纤陀螺是由光源、光检测器、合束分束器、光纤线圈及信号处理器构成，如图 2-5-5 所示。

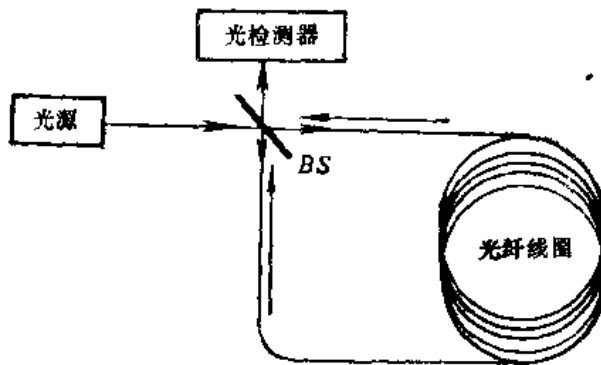


图 2-5-5 光纤陀螺原理图

从光源发出的光，经过合束分束器后，分成强度相等的两束光，分别从光纤线圈的两个端头耦合入光纤线圈，在相反方向上绕光纤圈一周后，分别从光纤线圈的相反端头出射，再经过合束分束器而复合，并产生干涉。当光纤线圈处于静止状态时，从光纤线圈两端头出来的两光束的光程差为零，陀螺输出也为零。当光纤线圈以角速度 Ω 旋转时，则会产生萨格奈克效应。设光纤线圈的面积为 S ，若有 N 匝，则由式 (2-5-10) 可得此两光束的光程差为：

$$\Delta L = \frac{4NS}{c} \Omega \quad (2-5-20)$$

设光纤线圈的平均直径为 D ，则 $S = \pi D^2 / 4$ ，并设光纤的总长度为 L ，则 $N = L /$

πD ，把 S 和 N 代入式 (2-5-20)，化简后得：

$$\Delta L = \frac{LD}{c} \Omega \quad (2-5-21)$$

相应的相位差为：

$$\Delta\phi = \frac{2\pi LD}{\lambda c} \Omega \quad (2-5-22)$$

由式 (2-5-20) 与式 (2-5-10) 相比较可知，利用多匝光纤线圈可以提高萨格奈克干涉仪的灵敏度。

光纤陀螺和环形激光陀螺都是以萨格奈克效应为基础的光学陀螺。它们的本质区别在于，光纤陀螺是被动型，而环形激光陀螺是主动型的。两者比较，光纤陀螺不仅具有环形激光陀螺的各项优点，而且在某些方面它还优于环形激光陀螺。

光纤陀螺不像环形激光陀螺那样本身就是一个谐振器，而光纤陀螺则是被动型的，其本身不是一个激光源，所以不存在闭锁问题，自然也就用不着高频机械抖动补偿了，它是一个真正无机械活动部分的完全静止型固态陀螺。由于它本身不是一个激光源，因而无需高压电螺及真空封装，也无需精密加工零件。

在现有的各种陀螺中，光纤陀螺的结构最为简单，而且所用的许多元器件都能与光纤通信通用，并可以光集成，适宜批量生产。因此，光纤陀螺比环形激光陀螺重量更轻，成本更低，寿命更长，更有竞争力。目前有些光纤陀螺的精度在实用条件下可达到陀螺仪的随机漂移率为 $0.1^\circ/\text{h}$ 。据有关资料介绍，目前实验室样机的最好水平是随机漂移为 $0.01^\circ/\text{h}$ 。从长远的观点看，光纤陀螺是具有强大的发展潜力和广阔的应用前景。

第三章 捷联矩阵的即时修正与算法误差

§ 3.1 捷联矩阵算法的数学基础

一、四元数代数

经典力学中古老的问题之一是刚体运动和坐标变换。在平台式惯性导航系统计算机软件中通常采用欧拉角及其方向余弦矩阵。由理论力学的知识可知，绕定点转动的刚体的角位置可以通过依次转过三个欧拉角的三次转动而获得；也可以通过绕某一瞬时轴转过某个角度的一次转动而获得。对于前者可以采用方向余弦法解决定点转动的刚体定位问题；对于后者可以采用四元数法来解决定位问题。B.P.哈密尔顿早在1943年就在数学中引入了四元数，但当时这种数学工具的优越性尚未显示出来，直到本世纪60年代末这种方法还没有得到实际应用。随着空间技术、计算技术、特别是捷联式惯性导航技术的发展，四元数的优越性才日渐引起人们的重视。在最近20年来，四元数理论才真正得到应用，许多参考资料都给出了有关四元数理论的详细叙述。这里仅给出研究捷联式惯性导航系统中所必需的最基本的四元数知识。

1. 定义

一般四元数是一个带实系数的一阶四元数组，是一个四维空间中的矢量，四元数 Q 可以写成如下的一般形式：

$$Q = q_0 \mathbf{1} + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (3-1-1)$$

式中 q_0, q_1, q_2, q_3 为四个实数， $\mathbf{1}$ 是实数部分的基，以后可以略去不写， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为四元数的另外三个虚数单位的基，其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 作为一个正交的基。四元数的基具有双重性质，因此有的文献中又将四元数称为超复数。这是因为四元数既有矢量代数中的矢量性质又有复数运算中的虚数性质。

2. 四元数的性质

设两个四元数为：

$$Q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$$

$$P = p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}$$

(1) 若两个四元数 Q 与 P 相等，则 $q_i = p_i, i = 0, 1, 2, 3$ 。

(2) 两个四元数的和或差为另一四元数。

$$Q \pm P = (q_0 \pm p_0) + (q_1 \pm p_1) \mathbf{i} + (q_2 \pm p_2) \mathbf{j} + (q_3 \pm p_3) \mathbf{k}$$

(3) 四元数乘以标量 a 得另一四元数，其四个元分别为原四元数对应元乘以该标量 a ，即

$$aQ = aq_0 + aq_1 \mathbf{i} + aq_2 \mathbf{j} + aq_3 \mathbf{k}$$

(4) 两个四元数相乘。

$$\begin{aligned}
 QP &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) \\
 &= q_0 p_0 - p_1 q_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 + q_0(p_1 i + p_2 j + p_3 k) \\
 &\quad + p_0(q_1 i + q_2 j + q_3 k) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{3-1-2}$$

1) 乘积的矢量形式

四元数 Q 、 P 可以分成标量和矢量两部分, 即

$$Q = q_0 + \mathbf{q} \quad P = p_0 + \mathbf{p}$$

式中 q_0 、 p_0 —— Q 、 P 的标量部分;

\mathbf{q} 、 \mathbf{p} —— Q 、 P 的矢量部分。

这样, 式 (3-1-2) 可以写成矢量形式为:

$$QP = q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \tag{3-1-3}$$

2) 乘积的四元数形式

把式 (3-1-2) 展开经整理也可以写成:

$$\begin{aligned}
 QP &= q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 + (q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2) i \\
 &\quad + (q_0 p_2 + q_2 p_0 + q_3 p_1 - q_1 p_3) j + (q_0 p_3 + q_3 p_0 + q_1 p_2 - q_2 p_1) k \\
 &= n_0 + n_1 i + n_2 j + n_3 k
 \end{aligned} \tag{3-1-4}$$

式中

$$\begin{aligned}
 n_0 &= q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 \\
 n_1 &= q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2
 \end{aligned} \tag{3-1-5}$$

$$n_2 = q_0 p_2 + q_2 p_0 + q_3 p_1 - q_1 p_3$$

$$n_3 = q_0 p_3 + q_3 p_0 + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

式 (3-1-4) 即为两个四元数乘积的四元数形式。

3) 乘积的矩阵形式

若把四元数 Q 、 P 、 N 的四个元写成列矢量形式, 即表示为:

$$Q(\mathbf{q}) = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$$

$$P(\mathbf{p}) = [p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T$$

$$N(\mathbf{n}) = [n_0 \quad n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

则式 (3-1-5) 可以写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

或

$$N(\mathbf{n}) = M(\mathbf{q})P(\mathbf{p}) \tag{3-1-6}$$

则式 (3-1-5) 也可以写成另一种形式为:

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

或

$$N(n) = M^*(p)Q(q) \quad (3-1-7)$$

在式 (3-1-6) 和式 (3-1-7) 中的 $M(q)$ 与 $M^*(p)$ 为 4×4 阶矩阵中, 去掉第一行与第一列, 剩下的 3×3 阶阵, 称该矩阵的“核”, 比较式 (3-1-6) 与式 (3-1-7) 可见, $M(p)$ 与 $M^*(p)$ 除元素不同外, 其核互为转置。

3. 四元数的运算法则

四元数的运算法则可由上述给出的四元数性质得出, 其运算法则如下:

$$\begin{aligned} \text{加法交换律} & \quad Q + P = P + Q \\ \text{加法结合律} & \quad (Q + P) + M = Q + (M + P) \\ & \quad aQ = Qa \\ & \quad (ab)Q = a(bQ) \\ & \quad (a + b)Q = aQ + bQ \\ & \quad a(Q + P) = aQ + aP \\ & \quad (QM)P = Q(MP) \\ & \quad Q(M + P) = QM + QP \end{aligned}$$

特别应强调的是, 四元数的乘法无交换律。

(1) 四元数的共轭数和模方

设四元数 $Q = q_0 + \mathbf{q}$, 则 Q 的共轭数 Q^* 定义为:

$$Q^* = q_0 - \mathbf{q} \text{ 或 } Q^* = (q_0 - \mathbf{q})$$

于是有,

$$\begin{aligned} (Q + P)^* &= (q_0 + \mathbf{q} + p_0 + \mathbf{p})^* \\ &= q_0 - \mathbf{q} + p_0 - \mathbf{p} \\ &= Q^* + P^* \\ (QP)^* &= [(q_0 + \mathbf{q})(p_0 + \mathbf{p})]^* \\ &= (q_0 p_0 - \mathbf{q}\mathbf{p} + q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p})^* \\ &= q_0 p_0 - \mathbf{q}\mathbf{p} - q_0 \mathbf{p} - p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \\ &= (p_0 - \mathbf{p})(q_0 - \mathbf{q}) \\ &= P^* Q^* \end{aligned}$$

前者表示两个四元数之和的共轭数等于其共轭之和, 后者表示两个四元数乘积的共轭数等于这两个四元数的共轭数改变相乘顺序的乘积。

四元数的模方 N 定义为:

$$N = QQ^* = Q^*Q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

由上式可知, 当 $N = 0$ 时, 应满足

$$q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0, \text{ 则 } Q = 0.$$

当 $N = 1$ 时, 称 Q 为单位四元数。

两个四元数乘积的模方等于其模方的乘积。

$$\begin{aligned} N_{QM} &= (QM)(QM)^* = QMM^*Q^* \\ &= QN_MQ^* = QQ^*N_M \\ &= N_QN_M \end{aligned} \quad (3-1-8)$$

(2) 四元数的逆和四元数的除法

设 Q 为非零四元数, 则 Q 的模方 $N \neq 0$, 且存在其逆。四元数的逆的定义为:

$$Q^{-1} = Q^*/N \quad (3-1-9)$$

即四元数的逆 Q^{-1} 为四元数的共轭数 Q^* 除以 Q 的模方 N 。

由模方的定义可得:

$$QQ^* = Q^*Q = N = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

则有

$$Q\left(\frac{Q^*}{N}\right) = \left(\frac{Q^*}{N}\right)Q = 1$$

即

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1$$

可见 Q 的逆 Q^{-1} 起着 Q 的倒数作用。

因为两个四元数乘积的模方等于其模方的乘积, 于是可得:

$$N_{Q^{-1}Q} = N_{Q^{-1}}N_Q = 1$$

则有

$$N_{Q^{-1}} = 1/N_Q \quad (3-1-10)$$

四元数 Q 除以 M ($M \neq 0$) 其商不能以 Q/M 表示, 而要用 QM^{-1} 或 $M^{-1}Q$ 表示, 但这两种情况要加以区分, 即分为右乘以 M^{-1} 或左乘以 M^{-1} 两种不同情况。

二、四元数在刚体定位中的应用

1. 四元数的“映像”

用四元数来研究刚体定点转动时, 四元数的矢量部分可以看作是三维空间中的一个矢量。

$$\begin{aligned} Q &= q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \\ &= q_0 + \mathbf{q} \end{aligned}$$

若把 i 、 j 、 k 看作是坐标系轴向上的单位矢量, 则 q_1 、 q_2 、 q_3 就是矢量 \mathbf{q} 在参考坐标系轴向上的分量, \mathbf{q} 可以写成任何其他动坐标系轴向上的分量形式。

$$\begin{aligned} Q &= q_{b0} + q_{b1}i_b + q_{b2}j_b + q_{b3}k_b \\ &= q_{b0} + q_{b1}i_b + q_{b2}j_b + q_{b3}k_b \end{aligned} \quad (3-1-11)$$

若用 Q 在任一动坐标系上的分量构成四元数, 即

$$Q_b = q_{b0} + q_{b1}i_b + q_{b2}j_b + q_{b3}k_b \quad (3-1-12)$$

称 Q_b 为四元数 Q 在 b 坐标系中的“映像”。对于三维空间中的一个矢量 \mathbf{r} , 可以写成任何坐标系中的分量形式, 这些分量形式都可以看成是标量为零的四元数, 如:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r_{bx}i_b + r_{by}j_b + r_{bz}k_b \\ &= r_{bx}i_b + r_{by}j_b + r_{bz}k_b \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} R &= r_0 + r \\ &= 0 + r_{b_x}i_b + r_{b_y}j_b + r_{b_z}k_b \\ &= 0 + r_{t_x}i_t + r_{t_y}j_t + r_{t_z}k_t \end{aligned}$$

若把上式中的 $i_b, j_b, k_b, i_t, j_t, k_t$ 改写成 i, j, k , 则有:

$$\begin{aligned} r_b &= r_{b_x}i + r_{b_y}j + r_{b_z}k \\ r_t &= r_{t_x}i + r_{t_y}j + r_{t_z}k \end{aligned}$$

式中 r_b 叫作矢量 r 在 b 坐标系上的四元数“映像”; r_t 叫作矢量 r 在 t 坐标系上的四元数“映像”

上述定义可以认为是用四元数来研究刚体定点转动问题时的一些“约定”。特别要注意的是, 对于 $i_b, j_b, k_b, i_t, j_t, k_t$ 等, 尽管可以看作是 b 与 t 坐标系轴向上的单位矢量, 但是在进行四元数运算时, 仍应按四元数的运算规则进行。

2. 四元数的三角表示法

为了用四元数来表示刚体的定点转动, 需采用四元数的三角表示法。

设四元数为:

$$Q = q_0 + q_1i_1 + q_2j_1 + q_3k_1$$

四元数 Q 的模可定义为:

$$h = \sqrt{N} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (3-1-13)$$

四元数的模又可称为四元数的范数, 它可表示为 $\text{Norm}Q$

设三角函数为:

$$\cos\alpha = \frac{q_0}{h}$$

则有

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{1}{h} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

对于四元数 Q 的向量部分 q , 令其单位矢量为 i , 显然有:

$$i = \frac{q_1i_1 + q_2j_1 + q_3k_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

于是四元数 Q 可以表示为:

$$\begin{aligned} Q &= h \left(\frac{q_0}{h} + \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{h} \cdot \frac{q_1i_1 + q_2j_1 + q_3k_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right) \\ &= h (\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi) \end{aligned}$$

当 Q 为单位四元数时记为 \dot{Q} , 此时 $h = 1$, 且有:

$$\cos\alpha = q_0$$

$$\sin\alpha = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

若根号取正, $0 \leq \alpha \leq \pi$, 则

$$\dot{Q} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

对非单位四元数, 则有

$$Q = h \dot{Q}$$

3. 转动的四元数变换

在刚体定点转动理论中, 根据欧拉定理, 动坐标系相对参考坐标的方位, 等效于动坐标系绕某一瞬时的欧拉旋转轴 On 转动一个角度 α (见图 3-1-1), On 轴称为欧拉轴, 角度 α 有时也叫欧拉角。

若用 n 表示欧拉轴向上的单位矢量, 则动坐标系的方位完全可以由 n 和 α 两个参数来确定, 即可用 n 和 α 两个参数构成一个四元数。

$$Q = \cos \frac{\alpha}{2} + n \sin \frac{\alpha}{2} = e^{(1/2) \alpha n} \quad (3-1-14)$$

如果把 n 写成分量的形式, 则:

$$\begin{aligned} Q &= \cos \frac{\alpha}{2} + n_x \sin \frac{\alpha}{2} i + n_y \sin \frac{\alpha}{2} j + n_z \sin \frac{\alpha}{2} k \\ &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \end{aligned} \quad (3-1-15)$$

式中 $q_0 = \cos \frac{\alpha}{2}$, $q_1 = n_x \sin \frac{\alpha}{2}$, $q_2 = n_y \sin \frac{\alpha}{2}$, $q_3 = n_z \sin \frac{\alpha}{2}$

显然, 式 (3-1-14) 的四元数是单位四元数, 即

$$h = \sqrt{N} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$$

这样的四元数又叫作“规范化”的四元数; 用来描述刚体定点转动的四元数, 即式 (3-1-14) 被叫作变换四元数。该四元数的矢量符号具有两重性, 这是因为可以将它看作是定坐标系上旋转矢量的算子, 也可以看作具有公共原点的两个坐标系之间角度关系的表达式。

图 3-1-2 以一简单的例子来说明具有恒定矢量的坐标旋转。

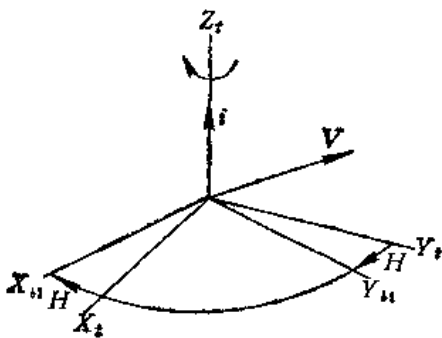


图3-1-2 具有恒定矢量的坐标系旋转

$$\dot{Q}_1 = \cos \frac{H}{2} - i \sin \frac{H}{2}$$

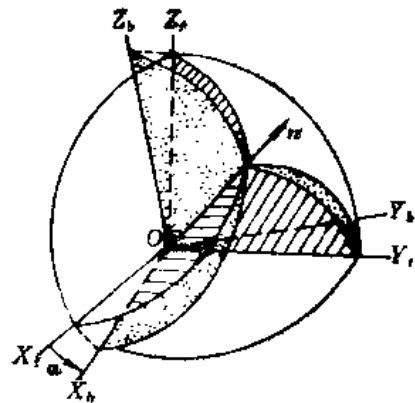


图3-1-1 四元数的物理概念

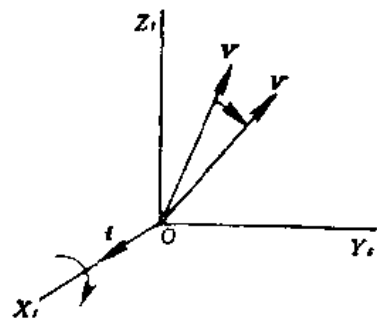


图3-1-3 在固定坐标系矢量的旋转

$$\dot{P} = \cos \frac{H}{2} - i \sin \frac{H}{2}$$

图 3-1-3 表示在固定坐标系中矢量的旋转。

4. 矢量坐标变换的四元数描述

一个矢量 r 在 i 坐标系轴向分量形式为:

$$\mathbf{r} = r_{ix} \mathbf{i}_i + r_{iy} \mathbf{j}_i + r_{iz} \mathbf{k}_i$$

式中 r_{ix} 、 r_{iy} 、 r_{iz} 为 \mathbf{r} 在地理坐标系轴向的分量； \mathbf{i}_i 、 \mathbf{j}_i 、 \mathbf{k}_i 为地理坐标系轴向的单位矢量。可用 r_{ix} 、 r_{iy} 、 r_{iz} 来表示 \mathbf{r} 的四元数的形式为：

$$R_i = 0 + r_{ix} \mathbf{i} + r_{iy} \mathbf{j} + r_{iz} \mathbf{k} = 0 + \mathbf{r}$$

R_i 就叫作矢量 \mathbf{r} 在地理坐标系上的四元数映像。 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 是四元数的虚数单位，而 \mathbf{r} 则是四元数的矢量部分，显然，如果认为 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 和 \mathbf{i}_i 、 \mathbf{j}_i 、 \mathbf{k}_i 重合，则四元数的矢量部分就是三维空间的矢量 \mathbf{r} 的本身。

假定矢量 \mathbf{r} 绕通过定点“O”的某一瞬时轴转动了一个角度 α ，则和矢量固联的动坐标系和参考坐标系之间的变换四元数为：

$$Q = \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\alpha}{2}$$

式中 \mathbf{n} ——转轴方向的单位矢量。

转动前的矢量用 \mathbf{r} 表示，转动后的矢量用 \mathbf{r}' 表示（见图3-1-4），则 \mathbf{r}' 和 \mathbf{r} 的关系可由四元数来描述，即

$$\mathbf{r}' = Q \cdot \mathbf{r} \cdot Q^* \quad (3-1-16)$$

把式 (3-1-16) 前乘以 Q^* ，后乘以 Q ，则有

$$Q^* \cdot \mathbf{r}' \cdot Q = Q^* \cdot Q \cdot \mathbf{r} \cdot Q^* \cdot Q$$

由于有

$$Q^* \cdot Q = Q \cdot Q^* = 1$$

所以

$$\mathbf{r} = Q^* \cdot \mathbf{r}' \cdot Q \quad (3-1-17)$$

下面来证明式 (3-1-16) 的表达式。当矢量 \mathbf{r} 绕 OO' 旋转时，矢端 A 在空间的轨迹是一个圆，这个圆平面和转轴垂直（图3-1-4），圆心为 O' 在旋转轴上。在圆上取一点 B ，使 $\angle AO'B = 90^\circ$ ，则按矢量关系有下列关系式：

$$\begin{aligned} \overline{OO'} &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \overline{O'A} &= \mathbf{r} - \overline{OO'} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \overline{O'B} &= \mathbf{n} \times \overline{O'A} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} \\ \overline{O'A'} &= \cos \alpha \overline{O'A} + \sin \alpha \overline{O'B} \\ &= \cos \alpha \mathbf{r} - \cos \alpha (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \sin \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' &= \overline{OO'} + \overline{O'A'} = (1 - \cos \alpha) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ &\quad + \cos \alpha \mathbf{r} + \sin \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3-1-18)$$

将 $Q \cdot \mathbf{r} \cdot Q^*$ 按式 (3-1-4) 用四元数相乘的规则展开，有：

$$\begin{aligned} Q \cdot \mathbf{r} \cdot Q^* &= \left[-\sin \frac{\alpha}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) + \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{r} + \sin \frac{\alpha}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \right] \\ &\quad \cdot \left[\cos \frac{\alpha}{2} - \mathbf{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right] \\ &= -\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \end{aligned}$$

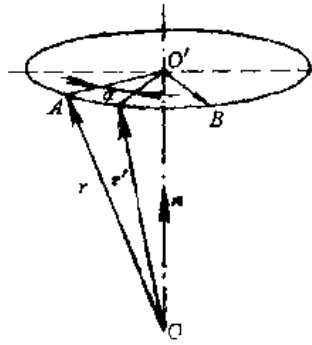


图3-1-4 矢量旋转

$$\begin{aligned}
& + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \mathbf{n} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \mathbf{r} \\
& + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \\
& - \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n} \\
= & 0 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \mathbf{r} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \\
& - \sin^2 \frac{\alpha}{2} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}] \\
= & \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \mathbf{r} + \sin \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \\
& - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \mathbf{r} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} \\
= & (1 - \cos \alpha) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \cos \alpha \mathbf{r} + \sin \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \tag{3-1-19}
\end{aligned}$$

比较式 (3-1-18) 与式 (3-1-19), 有:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}^*$$

下面来研究固定矢量坐标变换的四元数描述。若一个固定参考矢量 \mathbf{r} 在地理坐标系 (t 系) 和舰船坐标系 (b 系) 内的分量形式为:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r_{bx} \mathbf{i}_b + r_{by} \mathbf{j}_b + r_{bz} \mathbf{k}_b \\
&= r_{tx} \mathbf{i}_t + r_{ty} \mathbf{j}_t + r_{tz} \mathbf{k}_t
\end{aligned}$$

若用变换四元数 \mathbf{Q} 表示 b 系和 t 系之间的变换矩阵, 则按矢量转动的式 (3-1-16) 有:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_b &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_t \cdot \mathbf{Q}^* \\
\mathbf{j}_b &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}_t \cdot \mathbf{Q}^* \\
\mathbf{k}_b &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{Q}^*
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r_{bx} \mathbf{i}_b + r_{by} \mathbf{j}_b + r_{bz} \mathbf{k}_b \\
&= r_{tx} \mathbf{i}_t + r_{ty} \mathbf{j}_t + r_{tz} \mathbf{k}_t \\
&= r_{tx} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_t \cdot \mathbf{Q}^* + r_{ty} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}_t \cdot \mathbf{Q}^* + r_{tz} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{Q}^* \\
&= \mathbf{Q} \cdot (r_{tx} \mathbf{i}_t + r_{ty} \mathbf{j}_t + r_{tz} \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{Q}^*
\end{aligned}$$

如果

$$\begin{aligned}
R_t &= r_{tx} \mathbf{i}_t + r_{ty} \mathbf{j}_t + r_{tz} \mathbf{k}_t \\
R_b &= r_{bx} \mathbf{i}_b + r_{by} \mathbf{j}_b + r_{bz} \mathbf{k}_b
\end{aligned}$$

则有

$$R_t = \mathbf{Q} \cdot R_b \cdot \mathbf{Q}^* \tag{3-1-20}$$

或

$$R_b = \mathbf{Q}^* \cdot R_t \cdot \mathbf{Q} \tag{3-1-21}$$

式 (3-1-20) 与式 (3-1-21) 即为固定矢量坐标变换的四元数描述。它们和用方向余弦矩阵 (姿态矩阵) 表示的固定矢量的坐标变换式 (2-2-6) 相对应, 即:

$$\mathbf{r}' = T_i^t \mathbf{r}^b \quad \text{或} \quad \mathbf{r}^b = (T_i^t)^T \mathbf{r}'$$

三、转动四元数与转动方向余弦矩阵的关系

在第一章中我们讨论了舰船坐标系 $OX_bY_bZ_b$ 相对地理坐标系 $OX_tY_tZ_t$ 的转动角位置可以用方向余弦矩阵 T_b 来表示, 上面又研究了用四元数也可以表示转动。那么转动四元数与转动方向余弦矩阵之间又存在什么关系呢?

图 3-1-5 表明了动系 $OX_bY_bZ_b$ 相对定系 $OX_tY_tZ_t$ 的关系, 其单位矢量分别为 i_b, j_b, k_b 和 i_t, j_t, k_t , 令某一矢量 M 在动系和定系用投影表示分别为:

$$\begin{aligned} M &= x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \\ M &= x_t i_t + y_t j_t + z_t k_t \end{aligned}$$

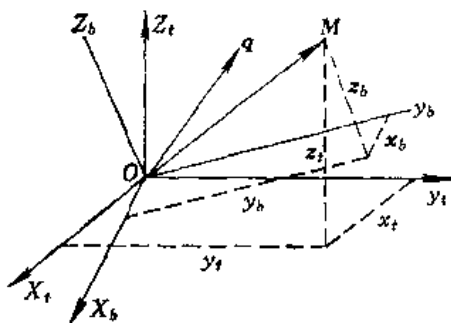


图3-1-5 矢量 M 在定系 $OX_tY_tZ_t$ 和动系 $OX_bY_bZ_b$ 中的投影

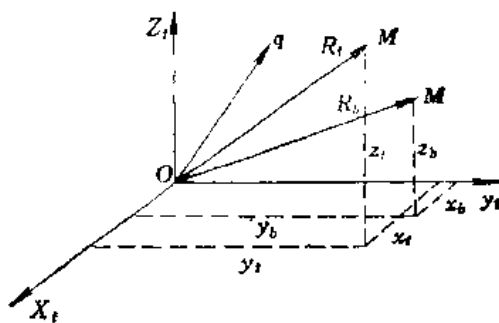


图3-1-6 矢量转动前后在同一坐标系中的两次投影

而动系 b 则看成绕瞬时轴 q 转动角 α 而获得。根据矢量投影的相对关系可知, 当矢量 M 不动而动系 b 相对定系 t 绕瞬时轴 q 转动一角 α 以后在两个坐标系上的投影 (图3-1-5) 与坐标系 $OX_bY_bZ_b$ 不动而矢量 M 绕 q 转动一角 α , 其转动前后的矢量 R_t, R_b 在同一坐标系上的投影 (图3-1-6) 是相等的。显然, R_b 的投影可以表示动系的位置, R_t 的投影可以表示定系的位置。若两个矢量的四元数表示形式分别为:

$$\begin{aligned} R_b &= 0 + x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \\ R_t &= 0 + x_t i_t + y_t j_t + z_t k_t \end{aligned} \tag{3-1-22}$$

若采用相反方向的转动, 即将矢量 R_b 绕瞬时轴 q 转动角 Q 后得到矢量 R_t , 则有如式 (3-1-20) 或式 (3-1-21) 的表达形式。

$$\begin{aligned} R_t &= Q \cdot R_b \cdot Q^* \\ R_b &= Q^* \cdot R_t \cdot Q \end{aligned}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} Q &= q_0 + q_1 i_t + q_2 j_t + q_3 k_t \\ Q^* &= q_0 - q_1 i_t - q_2 j_t - q_3 k_t \end{aligned} \right\} \tag{3-1-23}$$

将式 (3-1-23)、式 (3-1-22) 代入式 (3-1-21), 可得:

$$\begin{aligned} &x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \\ &= (q_0 - q_1 i_t - q_2 j_t - q_3 k_t) (x_t i_t + y_t j_t + z_t k_t) \\ &\quad \cdot (q_0 + q_1 i_t + q_2 j_t + q_3 k_t) \end{aligned}$$

按四元数运算法则展开, 并化简可得:

$$\begin{aligned} & x_b \mathbf{i}_r + y_b \mathbf{j}_r + z_b \mathbf{k}_r \\ &= [(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)x_r + 2(q_1q_2 + q_0q_3)y_r + 2(q_1q_3 - q_0q_2)z_r] \mathbf{i}_r \\ &+ [2(q_1q_2 - q_0q_3)x_r + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)y_r + 2(q_2q_3 + q_0q_1)z_r] \mathbf{j}_r \\ &+ [2(q_1q_3 + q_0q_2)x_r + 2(q_2q_3 - q_0q_1)y_r + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)z_r] \mathbf{k}_r \end{aligned}$$

将上式写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & q_2q_3 + q_0q_1 \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} \quad (3-1-24)$$

将式(3-1-24)与式(1-5-1)相对比, 可以看出转动四元数 Q 与转动方向余弦矩阵 T^b 之间存在着对应的关系: 当 q_0, q_1, q_2, q_3 确定以后, 根据式(3-1-24)可以唯一确定转动方向余弦矩阵 T^b 中的各元素; 反过来, 若知道了转动方向余弦矩阵 T^b 的元素值, 也可以求出相应的变换四元数 Q 的各个元。

四、转动四元数 Q 与一组欧拉角的关系

定系 OX, Y, Z , 和动系 OX_b, Y_b, Z_b 的转动角位置可以用一个四元数 Q 来表示, 也可以用一组欧拉角(例如§1.5中叙述的姿态角 H, ψ, θ)来表示, 如图1-2-2所示。

对应第一次转动角度 H 的四元数 Q_1 为:

$$Q_1 = \cos \frac{H}{2} + \mathbf{k}_r \sin \frac{H}{2} \quad (3-1-25)$$

其中 \mathbf{k}_r 为转动轴向上的单位矢量, Q_1 即为转动的特征四元数 Q_1^r 。

对应第二次转动角度 ψ 的四元数 Q_2 为:

$$Q_2 = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{j}_{b1} \sin \frac{\psi}{2}$$

其中 \mathbf{j}_{b1} 在动系 OX_{b1}, Y_{b1}, Z_{b1} 中的分量为 $[0 \ 1 \ 0]^T$, 所以 \mathbf{j}_{b1} 的映像为:

$$\mathbf{j}_{b1} = 0 \cdot \mathbf{i}_r + \mathbf{j}_r + 0 \cdot \mathbf{k}_r = \mathbf{j}_r$$

即

$$Q_2^r = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{j}_r \sin \frac{\psi}{2} \quad (3-1-26)$$

对应于第三次转动 θ 的四元数 Q_3 为:

$$Q_3 = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i}_b \sin \frac{\theta}{2}$$

其中 \mathbf{i}_b 在 b 坐标系中的分量为 $[1 \ 0 \ 0]^T$, 故 \mathbf{i}_b 的映像为:

$$\mathbf{i}_b = \mathbf{i}_r + 0 \cdot \mathbf{j}_r + 0 \cdot \mathbf{k}_r = \mathbf{i}_r$$

即 Q_3 对应的特征四元数 Q_3^r 为:

$$Q_3^r = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i}_r \sin \frac{\theta}{2} \quad (3-1-27)$$

将式(3-1-25)、式(3-1-26)、式(3-1-27)代入 b 系和 t 系之间的变换特征四元数 $Q = Q_3^r Q_2^r Q_1^r$, 按四元数相乘法展开, 可得 Q^r 对应的各元素表达式为:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{H}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{H}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ q_1 &= \cos \frac{H}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{H}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ q_2 &= \cos \frac{H}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{H}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ q_3 &= \sin \frac{H}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{H}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3-1-28)$$

显然，如果知道了姿态角 H 、 ψ 、 θ ，则可以按式 (3-1-28) 求出相应的变换四元数。

五、转动四元数 Q 的微分方程

在 § 2.2 中已经讨论了转动方向余弦矩阵的微分方程，通过对方向余弦矩阵进行即时修正便可以实时地确定方向余弦矩阵的各个元素。同样四元数的实时值也可以通过求解四元数微分方程而得到。

设在 t 时刻动系 $OX_b Y_b Z_b$ 以角速度 ω 相对定系 $OX_t Y_t Z_t$ 转动，则动系 b 和定系 t 之间的变换四元数 Q 同样是时间的函数，可用 $Q(t)$ 表示 t 时刻的四元数， $Q(t + \Delta t)$ 表示 $t + \Delta t$ 时刻的四元数，如图 3-1-7 所示。

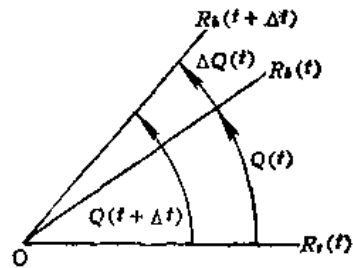


图 3-1-7 转动四元数 Q 的变换

从图 3-1-7 可以看出， $Q(t)$ 和 $\Delta Q(t)$ 之和为 $Q(t + \Delta t)$ ，故有：

$$Q(t + \Delta t) = \Delta Q(t) Q(t) \quad (3-1-29)$$

或

$$Q^c(t + \Delta t) = Q^c(t) \cdot \Delta Q^c(t) \quad (3-1-30)$$

考虑 Δt 很小，在 Δt 时间内动坐标系转动的角度为 $\Delta \alpha$ ，则有

$$\Delta Q(t) = \cos \frac{\Delta \alpha}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\Delta \alpha}{2} \approx 1 + \mathbf{n} \frac{\Delta \alpha}{2}$$

由于 $\Delta \alpha$ 是由 ω 在 Δt 时间内转过的角度，故

$$\mathbf{n} \Delta \alpha = \omega \Delta t$$

其中 ω 表示为：

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{bx} i_b + \omega_{by} j_b + \omega_{bz} k_b \\ &= \omega_{tx} i_t + \omega_{ty} j_t + \omega_{tz} k_t \\ &= \omega_t \end{aligned}$$

由于 $\omega_b = \omega_{bx} i_b + \omega_{by} j_b + \omega_{bz} k_b$ 为 ω 的“映像”，故有：

$$\Delta Q^c(t) = 1 + \frac{1}{2} \omega_b \Delta t$$

$$Q(t) = Q^c(t)$$

将上式代入式 (3-1-30) 中得：

$$Q^c(t + \Delta t) = Q^c(t) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \omega_b \Delta t \right] = Q^c(t) + \frac{1}{2} Q^c(t) \cdot \omega_b \Delta t$$

我们定义

$$\dot{Q}^c(t) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q^c(t + \Delta t) - Q^c(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} Q^c(t) \cdot \omega_b \quad (3-1-31)$$

若利用式 (3-1-29), 则有

$$\Delta Q(t) = 1 + \frac{1}{2} \omega_b \Delta t$$

所以

$$Q(t + \Delta t) = \left(1 + \frac{1}{2} \omega_b \Delta t \right) \cdot Q(t)$$

取

$$\dot{Q}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega_b \cdot Q(t) \quad (3-1-32)$$

式 (3-1-31) 和式 (3-1-32) 为四元数微分方程, 是四元数相乘。如果写成矩阵的形式就是:

$$Q(\dot{q}) = \frac{1}{2} M(q) Q(\omega_b)$$

或

$$Q(\dot{q}) = \frac{1}{2} M^*(\omega_b) Q(q)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{bx} & -\omega_{by} & -\omega_{bz} \\ \omega_{bx} & 0 & \omega_{bz} & -\omega_{by} \\ \omega_{by} & -\omega_{bz} & 0 & \omega_{bx} \\ \omega_{bz} & \omega_{by} & -\omega_{bx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3-1-33)$$

或

$$Q(\dot{q}) = \frac{1}{2} M(\omega_s) Q(q)$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{sx} & -\omega_{sy} & -\omega_{sz} \\ \omega_{sx} & 0 & -\omega_{sz} & \omega_{sy} \\ \omega_{sy} & \omega_{sz} & 0 & -\omega_{sx} \\ \omega_{sz} & -\omega_{sy} & \omega_{sx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3-1-34)$$

§ 3.2 捷联矩阵的即时修正算法

在船用捷联式惯性导航系统中, 舰船在地球表面的地理位置可用地理坐标系相对地球坐标系的方位关系来表示; 而舰船的姿态角则可用舰船坐标系相对地理坐标系的方位关系来表示。确定两个坐标系之间的方位关系问题, 在力学中则是刚体定点转动理论, 在刚体定点转动理论中, 描述动坐标系相对参考坐标系之间方位关系的方法有许多种,

例如：三参数法；四参数法；九参数法；还有三角函数法及等效转动矢量法等。

捷联矩阵（又称姿态矩阵）和位置矩阵都可以用上述几种参数来描述，下面主要针对捷联矩阵来讨论其即时修正算法。

一、三参数法

三参数法，也叫欧拉角法，是欧拉在 1776 年提出来的。舰船相对参考坐标系的方位完全可以由舰船坐标系依次绕三个不同的轴转动三个角来确定，如图 1-2-2 所示。其中 H 、 ψ 、 θ 分别为首向角和纵、横摇角。这样舰船坐标系相对地理坐标系的角速度的矢量 ω_{ib} 则可以表示为：

$$\omega_{ib} = \dot{H} + \dot{\psi} + \dot{\theta} \quad (3-2-1)$$

参照图 1-2-2，可将角速度 ω_{ib} 变为沿舰船坐标系的投影形式为：

$$\begin{bmatrix} \omega_{ib}^{b_1} \\ \omega_{ib}^{b_2} \\ \omega_{ib}^{b_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \psi & 0 & 1 \\ -\cos \psi \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{H} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3-2-2)$$

对式 (3-2-2) 中矩阵求逆便可得到：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{H} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \psi & 0 & 1 \\ -\cos \psi \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{ib}^{b_1} \\ \omega_{ib}^{b_2} \\ \omega_{ib}^{b_3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos \psi} \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ \cos \psi \cos \theta & 0 & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{ib}^{b_1} \\ \omega_{ib}^{b_2} \\ \omega_{ib}^{b_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-2-3)$$

式 (3-2-3) 便是欧拉角微分方程。解式 (3-2-3) 便可求得 H 、 ψ 、 θ 三个参数，将其代入式 (1-5-3) 便可求得姿态矩阵 T_i^b 。

求解欧拉角微分方程只需要解三个微分方程，与其他的算法相比，需求解的方程个数少一些。但在用计算机进行数值积分时要进行超越函数的运算，反面加大了计算工作量。实际惯性组件中陀螺仪测得的角速度为：

$$\omega_{ib} = \omega_{ie} + \omega_{ib} \quad (3-2-4)$$

这里的 ω_{ie} 系由地球自转角速率 ω_{ie} 和由舰船运动速度 V 引起的角速率，所以式 (3-2-3) 应稍作变化。另外用欧拉角法求解得到的姿态矩阵永远是正交矩阵，用这个矩阵进行加速度信息的坐标变换时，变换后的信息中不存在非正交误差，这样用欧拉角法得到的姿态矩阵则不需要进行正变化处理。

二、四参数法

四参数法，也称四元数法。四元数理论是数学中的一古老分支。1943年由哈密尔顿首先提出来的。目的在于研究空间几何。它是一种类似平面问题使用复数解的那样的方法。但是，这理论建立之后，长期没有得到实际应用，直到空间技术出现之后，特别是捷联式惯性导航技术出现之后，这一古老的数学分支，又重新受到人们的重视并得到实际应用。

由上一节得知，舰船坐标系相对地理坐标系的转动可以用转动四元数 Q 来表示，即

$$Q = q_0 + q_1 i_b + q_2 j_b + q_3 k_b$$

式中四元数的基 i_b 、 j_b 、 k_b 取为与舰船坐标系的基相一致。

从式 (3-1-33) 可得四元数微分方程的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{bx} & -\omega_{by} & -\omega_{bz} \\ \omega_{bx} & 0 & \omega_{bz} & -\omega_{by} \\ \omega_{by} & -\omega_{bz} & 0 & \omega_{bx} \\ \omega_{bz} & \omega_{by} & -\omega_{bx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

上述四元数微分方程的解和矩阵方程的解相类似, 可用毕卡逼近法求解, 对

$$\dot{Q}(q) = -\frac{1}{2} M^*(\omega_b) Q(q)$$

当 $M^*(\omega_b)$ 和 $\int_{t_1}^{t_2} M^*(\omega_b) dt$ 相乘满足可交换律时, 利用毕卡逼近法求解可得:

$$Q(q) = e^{-\frac{1}{2} \int M^*(\omega_b) dt} Q(q)_{t=0}$$

令 $[\Delta\theta] = \int M^*(\omega_b) dt$, 则上式可简写为:

$$q(t) = e^{-\frac{1}{2} [\Delta\theta]} q(0) \quad (3-2-5)$$

式中

$$q(t) = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$$

初始条件 $q(0)$ 是 $t=0$ 时的 q 值。

$$[\Delta\theta] = \int_{t_1}^{t_2} M^*(\omega_b) dt = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3-2-6)$$

可以用求 $[\Delta\theta]$ 特征值的方法, 把式 (3-2-5) 写成三角函数形式, 这里将采用一种更简便的方法, 把 $e^{-\frac{1}{2} [\Delta\theta]}$ 展开得:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2} [\Delta\theta]} &= I + \frac{[\Delta\theta]}{2} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^3 \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(-\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^n + \dots \end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned} [\Delta\theta]^2 &= -[\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2] I = -\Delta\theta_x^2 I \\ [\Delta\theta]^3 &= -\Delta\theta_x^2 [\Delta\theta] \\ [\Delta\theta]^4 &= \Delta\theta_x^4 I \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{2}[\Delta\theta]} &= \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^4 - \frac{1}{6!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^6 + \dots \right] I \\
 &\quad + \frac{[\Delta\theta]}{\Delta\theta_0} \left[\frac{\Delta\theta_0}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^7 + \dots \right] \\
 &= \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} I + \frac{[\Delta\theta]}{\Delta\theta_0} \sin \frac{\Delta\theta_0}{2}
 \end{aligned}$$

故有

$$q(t) = \left\{ \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} [\Delta\theta] \right\} q(0) \quad (3-2-7)$$

式(3-2-7)即为四元数微分方程的解析解。实时地求出 q_0 、 q_1 、 q_2 、 q_3 ，便可以根据式(3-1-24)相应地唯一确定姿态矩阵 T_i^s 中各个元素。

通过上述讨论可以看出，求解四元数微分方程要解四个微分方程，虽然要比解欧拉微分方程多一个方程，但进行数值计算求解时只需要进行加减乘法运算，所以求解过程的计算量要比欧拉角法减少得多。

三、九参数法

九参数法，又称方向余弦法。方向余弦法是用矢量的方向余弦来表示姿态矩阵的方法。我们知道，矢量的坐标变换有两种情况：一种是固定矢量的坐标变换，一种是旋转矢量的坐标变换。前者是说固定矢量的坐标变换，是一个在空间大小和方向都不变的矢量在两个不同方位坐标系轴向分量的变换关系，也就是同一矢量在两个不同的坐标系轴向投影之间的变换关系；后者是指一个矢量大小不变，但在方向上转动了一个位置，这个矢量转动前和转动后在同一个坐标轴向上分量之间的关系，如图 3-1-5 与图 3-1-6 所示。在进行坐标变换时，二者是有区别的。

绕定点转动的两个坐标系之间的关系可以用方向余弦矩阵来表示。方向余弦矩阵是随时间变化的，其变换规律的数学描述就是方向余弦矩阵的微分方程，而方向余弦矩阵的即时值就可以由求解该微分方程而得到。下而来研究转动的方向余弦矩阵的数分方程的形式。

设动系 $OX_i Y_i Z_i$ 和定系 $OX Y Z$ 的关系如图 3-2-1 所示。动系相对定系的运动角速度 ω_{ib} ，动系内有一点 M ，其位置可用矢量 r 表示，由矢量的相对导数和绝对导数的关系式，可得：

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_i = \left. \frac{dr}{dt} \right|_b + \omega_{ib} \times r \quad (3-2-8)$$

假定定系相对惯性空间不动，则

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_i = 0$$

于是有

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_b = -\omega_{ib} \times r$$

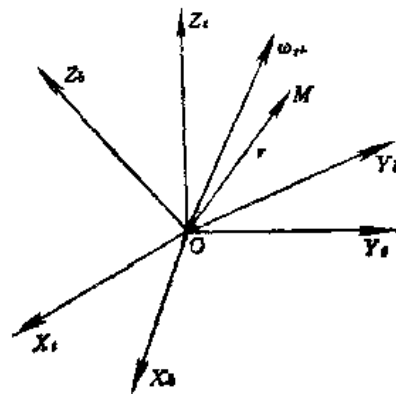


图3-2-1 动系和定系的关系

把上述式子各矢量投影在动系上, 写成矩阵形式为:

$$\dot{r}^b = -[\omega_{ib}^b \times] r^b = -\omega_{ib}^b r^b \quad (3-2-9)$$

其中

$$[\omega_{ib}^b \times] \triangleq \omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ib}^{bx} & \omega_{ib}^{by} \\ \omega_{ib}^{bx} & 0 & -\omega_{ib}^{bz} \\ -\omega_{ib}^{by} & \omega_{ib}^{bz} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-2-10)$$

式 (3-2-10) 为角速度 ω_{ib} 在动系轴向分量的反对称矩阵形式。

另一方面, 由固定矢量的坐标变换关系, 可得:

$$r^b = T_i^b r^i$$

对上式两边求导, 得:

$$\dot{r}^b = \dot{T}_i^b r^i + T_i^b \dot{r}^i$$

考虑到 $\dot{r}^i = 0$, 则

$$\dot{r}^b = \dot{T}_i^b r^i = \dot{T}_i^b T_i^b r^b \quad (3-2-11)$$

比较式 (3-2-9) 与式 (3-2-11), 则有:

$$-\omega_{ib}^b = \dot{T}_i^b T_i^b$$

将上述等式两边右侧乘以 T_i^b , 得:

$$\dot{T}_i^b = -\omega_{ib}^b T_i^b \quad (3-2-12)$$

考虑到 T_i^b 为正交矩阵, ω_{ib}^b 为反对称矩阵, 则有:

$$\begin{aligned} (T_i^b)^T &= (T_i^b)^{-1} = T_i^b \\ (\omega_{ib}^b)^{-1} &= (\omega_{ib}^b)^T = -\omega_{ib}^b \end{aligned}$$

对式 (3-2-12) 两边求逆, 则有:

$$\dot{T}_i^b = T_i^b \omega_{ib}^b \quad (3-2-13)$$

式 (3-2-12) 与式 (3-2-13) 即为常用的姿态矩阵方程的两种形式。它们代表了一组九个微分方程,

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{11} & \dot{T}_{12} & \dot{T}_{13} \\ \dot{T}_{21} & \dot{T}_{22} & \dot{T}_{23} \\ \dot{T}_{31} & \dot{T}_{32} & \dot{T}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ib}^{bx} & \omega_{ib}^{by} \\ \omega_{ib}^{bx} & 0 & -\omega_{ib}^{bz} \\ -\omega_{ib}^{by} & \omega_{ib}^{bz} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-2-14)$$

在捷联式惯性导航系统中, 由于陀螺仪是固联在船体上, 所以直接测量得到的角速度是舰船坐标系轴向分量, 因此对姿态矩阵求解时利用式 (3-2-14) 最为方便, 但陀螺仪测量得到的是 ω_{ib}^i , 而不是 ω_{ib}^b , 二者的关系为:

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ib}^i + \omega_{ib}^i$$

故有

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ib}^i - \omega_{ib}^i \quad (3-2-15)$$

由角速度反对称矩阵的相似变换, 得:

$$\omega_{ib}^b = T_i^b \omega_{ib}^i T_i^b \quad (3-2-16)$$

将式 (3-2-15) 与式 (3-2-16) 代入式 (3-2-13), 得:

$$\begin{aligned}
 \dot{T}_b^i &= T_b^i(\omega_{ib}^{ib} - \omega_{ib}^{ib}) \\
 &= T_b^i\omega_{ib}^{ib} - T_b^i\omega_{ib}^{ib} \\
 &= T_b^i\omega_{ib}^{ib} - T_b^i T_b^j \omega_{ij}^{ij} T_b^i \\
 &= T_b^i\omega_{ib}^{ib} - \omega_{ib}^{ib} T_b^i
 \end{aligned} \tag{3-2-17}$$

在实时计算方程 (3-2-17) 时, 第一项用较高的速度计算, 这是因为 ω_{ib}^{ib} 中包含有舰船的姿态角速度数值较大 (可达 $60^\circ/s$), 而 ω_{ib}^{ib} 则是地球角速度和舰船的位移运动相对地心惯性坐标系形成的角速度之和, 其数值一般较小 (每小时仅有几十度), 这样第一项需要较高的速度计算, 用迭代算法时, 迭代频率要高; 而第二项则可以用较低的迭代频率计算, 可以看作是对第二项的修正。

用方向余弦法求解姿态矩阵避免了欧拉角法的方程退化, 可以全姿态工作。但方向余弦矩阵具有九个元素, 所以解算矩阵微分方程时, 实际是解算九个联合微分方程, 一般说来计算工作量是比较大的。

四、三角函数法

坐标变换矩阵也可以用三角函数来表达。设坐标系 $OX_b^i Y_b^i Z_b^i$ 为 $t = l \cdot \tau$ (τ 为变换矩阵的计算周期) 时的载体坐标系; 而 $OX_b^{i+1} Y_b^{i+1} Z_b^{i+1}$ 为 $t = (l+1)\tau$ 时的载体坐标系。

载体坐标系以角速度 ω_b 相对地理坐标系运动, 若不考虑转动过程, 只考虑转动的结果, 即只注意载体坐标系在各时刻所处的位置, 那么载体坐标系 $OX_b^i Y_b^i Z_b^i$ 到 $OX_b^{i+1} Y_b^{i+1} Z_b^{i+1}$ 这一运动则可以用三次转动来等效地表示。

$$OX_b^i Y_b^i Z_b^i \xrightarrow[\text{OZ}_b^i]{-\Delta H} OX_b^i Y_b^i Z_b^i \xrightarrow[\text{OX}_b^i]{\Delta \psi} OX_b^i Y_b^i Z_b^i \xrightarrow[\text{OY}_b^i]{\Delta \theta} OX_b^{i+1} Y_b^{i+1} Z_b^{i+1}$$

其坐标变换图类似图 1-2-2 所示。

令:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \Delta \psi \\ \cos \Delta \psi \\ \sin \Delta \theta \\ \cos \Delta \theta \\ \sin \Delta H \\ \cos \Delta H \end{pmatrix} \tag{3-2-18}$$

则有:

$$C_{l+1}^i = \begin{bmatrix} r_4 r_6 + r_1 r_3 r_5 & r_2 r_5 & r_3 r_6 - r_1 r_4 r_5 \\ r_1 r_3 r_6 - r_4 r_5 & r_2 r_6 & -r_3 r_5 - r_1 r_4 r_6 \\ -r_2 r_3 & r_1 & r_2 r_4 \end{bmatrix} \tag{3-2-19}$$

C_{l+1}^i 是坐标系 $OX_b^i Y_b^i Z_b^i$ 到 $OX_b^{i+1} Y_b^{i+1} Z_b^{i+1}$ 的坐标变换矩阵, 它与矢量 \mathbf{R} 的对应关系记作:

$$C_{l+1}^i = L\{\mathbf{R}\} \tag{3-2-20}$$

三角函数的微分方程, 由式 (3-2-20) 可以看出, 矩阵 C_{l+1}^i 由 \mathbf{R} 唯一地确定的,

而 R 是时间的函数, 将 R 对时间求导, 则有:

$$\frac{dR}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \\ \dot{r}_4 \\ \dot{r}_5 \\ \dot{r}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 & 0 & 0 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_4 & 0 \\ 0 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \\ 0 & 0 & -r_5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\psi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{H} \end{bmatrix} \quad (3-2-21)$$

角速度 ω_b 在坐标系 $OX_b^{i+1}Y_b^{i+1}Z_b^{i+1}$ 上投影为:

$$\begin{aligned} \omega_b &= \begin{bmatrix} \omega_{i_b}^{b_x} \\ \omega_{i_b}^{b_y} \\ \omega_{i_b}^{b_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta & 0 & \cos\Delta\psi\sin\Delta\theta \\ 0 & 1 & -\sin\Delta\psi \\ \sin\Delta\theta & 0 & -\cos\Delta\psi\cos\Delta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\psi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{H} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_4 & 0 & r_2r_3 \\ 0 & 1 & -r_1 \\ r_3 & 0 & -r_2r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\psi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{H} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-2-22)$$

对上式求逆, 有:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\psi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_4}{r_3^2+r_4^2} & 0 & \frac{r_3}{r_3^2+r_4^2} \\ \frac{r_1r_3}{r_2(r_3^2+r_4^2)} & 1 & -\frac{r_1r_4}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \\ \frac{r_3}{r_2(r_3^2+r_4^2)} & 0 & -\frac{r_4}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i_b}^{b_x} \\ \omega_{i_b}^{b_y} \\ \omega_{i_b}^{b_z} \end{bmatrix} \quad (3-2-23)$$

将式 (3-2-23) 代入式 (3-2-21), 有:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \\ \dot{r}_4 \\ \dot{r}_5 \\ \dot{r}_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_2 & 0 & 0 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_4 & 0 \\ 0 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 \\ 0 & 0 & -r_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r_4}{r_3^2+r_4^2} & 0 & \frac{r_3}{r_3^2+r_4^2} \\ \frac{r_1r_3}{r_2(r_3^2+r_4^2)} & 1 & -\frac{r_1r_4}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \\ \frac{r_3}{r_2(r_3^2+r_4^2)} & 0 & -\frac{r_4}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i_b}^{b_x} \\ \omega_{i_b}^{b_y} \\ \omega_{i_b}^{b_z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r_2r_4}{r_3^2+r_4^2} & 0 & \frac{r_2r_3}{r_3^2+r_4^2} \\ -\frac{r_1r_4}{r_3^2+r_4^2} & 0 & \frac{r_1^2r_4}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \\ \frac{r_1r_3r_4}{r_2(r_3^2+r_4^2)} & r_4 & \frac{-r_1r_4^2}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \\ -\frac{r_1r_3^2}{r_2(r_3^2+r_4^2)} & -r_3 & \frac{r_1r_3r_4}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \\ \frac{r_3r_6}{r_2(r_3^2+r_4^2)} & 0 & \frac{-r_4r_6}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \\ -\frac{r_3r_5}{r_2(r_3^2+r_4^2)} & 0 & \frac{r_4r_5}{r_2(r_3^2+r_4^2)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i_b}^{b_x} \\ \omega_{i_b}^{b_y} \\ \omega_{i_b}^{b_z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-2-24)$$

将式 (3-2-24) 展开写成:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{i}_1 &= \frac{r_2 r_4}{r_3^2 + r_4^2} \omega_{i_b}^{b_x} + \frac{r_3 r_4}{r_3^2 + r_4^2} \omega_{i_b}^{b_y} \\
 \dot{i}_2 &= \frac{-r_1 r_4}{r_3^2 + r_4^2} \omega_{i_b}^{b_x} + \frac{r_1^2 r_4}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_y} \\
 \dot{i}_3 &= \frac{r_1 r_3 r_4}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_x} + r_4 \omega_{i_b}^{b_y} + \frac{-r_1 r_4^2}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_z} \\
 \dot{i}_4 &= \frac{r_1 r_3^2}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_x} - r_3 \omega_{i_b}^{b_y} + \frac{r_1 r_3 r_4}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_z} \\
 \dot{i}_5 &= \frac{r_3 r_4}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_x} + \frac{-r_4 r_4}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_y} \\
 \dot{i}_6 &= \frac{-r_2 r_5}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_x} + \frac{r_4 r_5}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_y}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-2-25)$$

不论载体坐标系的角速度如何, 描述它在一个计算周期内运动结果的三个等效转角 ΔH , $\Delta \psi$, $\Delta \theta$ 必为小角度, 即 $|\Delta H| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\Delta \psi| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\Delta \theta| \leq \frac{\pi}{2}$, 因此对任一周期, $r_2 = \cos \Delta \psi \approx 1$, $r_3^2 + r_4^2 = 1$, 则方程组 (3-2-25) 不会出现奇点。

在每一周期的起始时刻, 坐标系 $OX_i^i Y_i^i Z_i^i$ 与坐标系 $OX_{i+1}^{i+1} Y_{i+1}^{i+1} Z_{i+1}^{i+1}$ 是重合的, 角度 ΔH , $\Delta \psi$, $\Delta \theta$ 均等于零, 故方程 (3-2-25) 的初始值 R_0 是与 i 无关的常数。

$$[R_0]^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

根据三角函数关系式, 有:

$$r_{i+1} = (1 - r_i^2)^{1/2}, \quad i = 1, 3, 5.$$

于是得到三角函数微分方程为:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{i}_1 &= \sqrt{1 - r_1^2} \left[\frac{r_4}{r_3^2 + r_4^2} \omega_{i_b}^{b_x} + \frac{r_3}{r_3^2 + r_4^2} \omega_{i_b}^{b_y} \right] \\
 \dot{i}_3 &= \sqrt{1 - r_3^2} \left[\frac{r_1 r_4}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_x} + \omega_{i_b}^{b_y} - \frac{r_1 r_4}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_z} \right] \\
 \dot{i}_5 &= \sqrt{1 - r_5^2} \left[-\frac{r_3}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_x} + \frac{r_4}{r_2 (r_3^2 + r_4^2)} \omega_{i_b}^{b_y} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (3-2-26)$$

初始条件:

$$\begin{aligned}
 r_{01} &= r_{03} = r_{05} = 0 \\
 r_{i+1} &= (1 - r_i^2)^{1/2}, \quad i = 1, 3, 5. \\
 &= 1 - \frac{1}{2} r_i^2 - \frac{1}{8} r_i^4 - \frac{1}{16} r_i^6 - \frac{1}{128} r_i^8 - \dots
 \end{aligned} \quad (3-2-27)$$

由于 $|r_i| \ll 1$, 上式右边是一个快速收敛的级数, 解方程 (3-2-26) 不一定要做开方运算, 可以用式 (3-2-27) 在数值积分时取级数前两项或前三项, 最后求取 r_2 , r_4 , r_6 时取其前四项就足够了。

先用式 (3-2-26) 求解出 r_1 , r_3 , r_5 , 再求得 r_2 , r_4 , r_6 , 将 R 代入式 (3-2-19) 即可得 C_{i+1} 。

设 $t = l \cdot \tau$ 时, 载体坐标系的坐标变换矩阵为 C_l , $t = (l+1)\tau$ 时为 C_{l+1} , 则

$$C_{l+1} = C_l C_{l+1} \quad (3-2-28')$$

若从 $t = 0$ 开始计算, 则 $C_0^* = I$ (单位矩阵), C_0 由初始对准确定, 不难看出,

$$C_{t+1} = \prod_{i=0}^t C_{t+1}^i \quad (3-2-29)$$

这表明载体坐标系相对地理坐标系的姿态矩阵可以通过解方程 (3-2-26) 求得。上述这种方法即为三角函数法。

§ 3.3 捷联矩阵的算法误差分析

由于捷联系统中的惯性传感器与载体固联, 这样加速度计与陀螺仪所测得的比力、角速率的量测值都是沿舰船坐标系的, 而欲求得舰船的位置和姿态则应知道比力与角速率在当地地理坐标系中的投影。这样不仅要知道当地地理纬度 φ , 而且还要了解姿态矩阵 (又称捷联矩阵)。为了得到捷联矩阵最好用四元数法, 这是因为无论从计算速度还是从计算精度上考虑, 四元数法比其他方法更为有利。

一、捷联矩阵的四元数法算法误差分析

载体坐标系 Ox_b, Y_b, Z_b 和地理坐标系 Ox_g, Y_g, Z_g 之间的角位置关系, 可用转动四元数表示。

$$Q = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

利用式 (3-1-33) 与式 (3-1-34) 可以得到 Ox_b, Y_b, Z_b 和 Ox_g, Y_g, Z_g 之间的相关四元数 Q 的微分方程式:

$$Q(\dot{q}) = \frac{1}{2} [\Omega_b] Q(q) - \frac{1}{2} [\Omega_g] Q(t) \quad (3-3-1)$$

其中反对称矩阵 $[\Omega_b]$ 、 $[\Omega_g]$ 为:

$$[\Omega_b] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\omega_{ib}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{ib} & \dots & \omega_{ib}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ib}^{bz} & -\omega_{ib}^{by} & -\omega_{ib}^{bx} \\ \omega_{ib}^{bz} & 0 & \omega_{ib}^{bz} & -\omega_{ib}^{by} \\ \omega_{ib}^{by} & -\omega_{ib}^{bz} & 0 & \omega_{ib}^{bx} \\ \omega_{ib}^{bx} & \omega_{ib}^{by} & -\omega_{ib}^{bz} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega_g] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\omega_{ig}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{ig} & \dots & \omega_{ig}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ig}^{gz} & -\omega_{ig}^{gy} & -\omega_{ig}^{gx} \\ \omega_{ig}^{gz} & 0 & \omega_{ig}^{gz} & -\omega_{ig}^{gy} \\ \omega_{ig}^{gy} & -\omega_{ig}^{gz} & 0 & \omega_{ig}^{gx} \\ \omega_{ig}^{gx} & \omega_{ig}^{gy} & -\omega_{ig}^{gz} & 0 \end{bmatrix}$$

这里

$$\omega_{ib} = [\omega_{ib}^{bx} \quad \omega_{ib}^{by} \quad \omega_{ib}^{bz}]^T$$

$$\omega_{ig} = \begin{bmatrix} \omega_{ig}^{gx} \\ \omega_{ig}^{gy} \\ \omega_{ig}^{gz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \\ (\omega_{ig} + \dot{\lambda}) \cos \varphi \\ (\omega_{ig} + \dot{\lambda}) \sin \varphi \end{bmatrix}$$

这里的 ω_{ib}^{bx} 、 ω_{ib}^{by} 、 ω_{ib}^{bz} 是舰船相对惯性坐标系角速率在载体坐标系轴向的分量; ω_{ig}^{gx} 、 ω_{ig}^{gy} 、 ω_{ig}^{gz} 是地理坐标系相对惯性坐标系角速率在地理坐标系轴向的投影; ω_{ig} 是地球自

传速率， λ 、 φ 是舰船所在地即时经纬度。

将舰船坐标系利用四元数 Q 转换为地理坐标系时，可由式 (3-1-24) 稍作变化即得方向余弦矩阵为：

$$T_i^g = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_0q_3 + q_1q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3-3-2)$$

由式 (3-1-31) 与式 (3-1-32) 可将式 (3-3-1) 改写成下列形式：

$$\dot{Q}(q) = \frac{1}{2} Q^*(q) \omega_{ib} - \frac{1}{2} R^*(q) \omega_{ib} \quad (3-3-3)$$

其中

$$Q^*(q) = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

$$R^*(q) = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

从式 (1-3-27) 可以得到舰船在地理坐标系中的运动速度矢量的微分方程为：

$$\dot{V}_{ib}^g = T_{ib}^g a_{ib}^b - [(2\omega_{ie}^g + \omega_{ie}^b) \times V_{ib}^g + g^g] \quad (3-3-4)$$

式中 a_{ib}^b 是加速度计测得的沿舰船轴向的比力矢量； V_{ib}^g 是舰船相对地理坐标系的速度矢量在地理坐标系中的投影。各分量投影如下：

$$\left. \begin{aligned} a_{ib}^b &= (a_{ib}^{bx} \ a_{ib}^{by} \ a_{ib}^{bz})^T \\ V_{ib}^g &= (V_{ib}^{gx} \ V_{ib}^{gy} \ V_{ib}^{gz})^T \\ \omega_{ie}^g &= (0 \ \omega_{ie} \cos \varphi \ \omega_{ie} \sin \varphi)^T \\ \omega_{ie}^b &= (\dot{\varphi} \ \dot{\lambda} \cos \varphi \ \dot{\lambda} \sin \varphi)^T \\ (2\omega_{ie}^g + \omega_{ie}^b) \times &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & -2(\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \sin \varphi & (2\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \cos \varphi \\ (2\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \sin \varphi & 0 & -\dot{\varphi} \\ -(2\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \cos \varphi & \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3-3-5)$$

这样就可以得到地理坐标系中舰船位置的微分方程为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= V_{ib}^{gz} / R_E \cdot \cos \varphi \\ \dot{\varphi} &= V_{ib}^{gy} / R_N \end{aligned} \right\} \quad (3-3-6)$$

从式 (3-3-1)、式 (3-3-4) 和式 (3-3-6) 按惯性传感器所测得的比力和角速率就可以求得舰船的真实姿态角和位置。而在实际捷联系统中，有用的只是指示值。以后凡是指示值均加 “ \wedge ” 标记，以示和真实值的区别。指示值一般是由计算得到的。

误差方程可表示为：

$$\left. \begin{aligned} \delta q &= q - \hat{q} \\ \delta V_{i_b}^b &= V_{i_b}^b - \hat{V}_{i_b}^b \\ \delta a_{i_b}^b &= a_{i_b}^b - \hat{a}_{i_b}^b \\ \delta \varphi &= \varphi - \hat{\varphi} \\ \delta \lambda &= \lambda - \hat{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (3-3-7)$$

误差很小时，误差的乘积可忽略不计。而对于误差一阶量来说，由式(3-3-1)与式(3-3-3)可得四元数误差满足下列微分方程：

$$\delta \dot{Q} = -\frac{1}{2} [\Omega_b] \delta Q - \frac{1}{2} [\Omega_e] \delta Q + \frac{1}{2} Q^*(q) \delta \omega_{i_b} - \frac{1}{2} R^*(q) \delta \omega_{i_e} \quad (3-3-8)$$

式中

$$\delta q = \begin{bmatrix} \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix}$$

$$\delta \omega_{i_b} = (\delta \omega_{i_b}^{x'} \quad \delta \omega_{i_b}^{y'} \quad \delta \omega_{i_b}^{z'})^T$$

$$\delta \omega_{i_e} = \begin{bmatrix} \delta \omega_{i_e}^{x'} \\ \delta \omega_{i_e}^{y'} \\ \delta \omega_{i_e}^{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \rho_x \\ \delta \Omega_y + \delta \rho_y \\ \delta \Omega_z + \delta \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta (V_{i_b}^{z'}/R_N) \\ \delta (\omega_{i_e} \cos \varphi + V_{i_b}^{x'}/R_E) \\ \delta (\omega_{i_e} \sin \varphi + V_{i_b}^{y'} \operatorname{tg} \varphi / R_E) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta V_{i_b}^{z'}/R_N \\ -\omega_{i_e} \sin \varphi \delta \varphi + \delta V_{i_b}^{x'}/R_E \\ \omega_{i_e} \cos \varphi \delta \varphi + \delta V_{i_b}^{y'} \operatorname{tg} \varphi / R_E + V_{i_b}^{z'} \sec^2 \varphi \delta \varphi / R_E \end{bmatrix}$$

其中：

$\delta \Omega_y$ 、 $\delta \Omega_z$ 表示地球自转速率 ω_{i_e} 在地理坐标系中的误差投影分量；

$\delta \rho_x$ 、 $\delta \rho_y$ 、 $\delta \rho_z$ 表示由舰船运动引起的舰船上的地理坐标系的旋转速率的误差投影分量。

由式(3-3-8)求得四元数误差 δQ ，将它代入式(3-3-2)即可求得捷联矩阵的误差值，进而可以得到姿态角的误差值。

二、实时算法中计算误差的种类

从对信号采样起，计算误差应包括：量化误差、不可交换误差、舍入误差和截断误差。

1. 量化误差

量化误差是由于将惯性敏感器的模拟输入量转换为角度和角速度的离散量过程中量化单位的有限性所造成的。这是因为把一个连续的模拟信息转换成计算机所需要的离散数字信息，要经过两个断续过程，第一是时间上的断续采样过程，若某一信号可以表示为连续时间函数 $f(t)$ ，那么把这一信号用它的等间隔 T 的离散序列 $f(T)$ 、 $f(2T)$ 、 $f(3T) \cdots f(nT)$ 或简记为 $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(3) \cdots f(n)$ 表示的过程为取样过程。 T 称为采样周期。它的处理过程如图3-3-1(a)与(b)所示，信号的取样脉冲应作得很窄，以便在空余时间可以多路复用。这样取样脉冲可以表示成图3-3-1(c)所示的二

进制数。这就是数值断续正量过程，即如图 3-3-2 所示用开关表示取样过程，即将连续的模拟信号 $f(t)$ 经过采样后变成离散的模拟信号 $f^*(t)$ 后，在数值上表示成最小二进位制的正倍数。这一过程称为正量。采样信号 $f^*(t)$ 经过正量后，则变成了时间与幅度均被量化的信号，即为数字信号与离散信号 $f^*(t)$ 。“离散”二字多用于理论论述，离散信号通常还称为离散时间信号。“数字”二字则多是相对模拟而言。

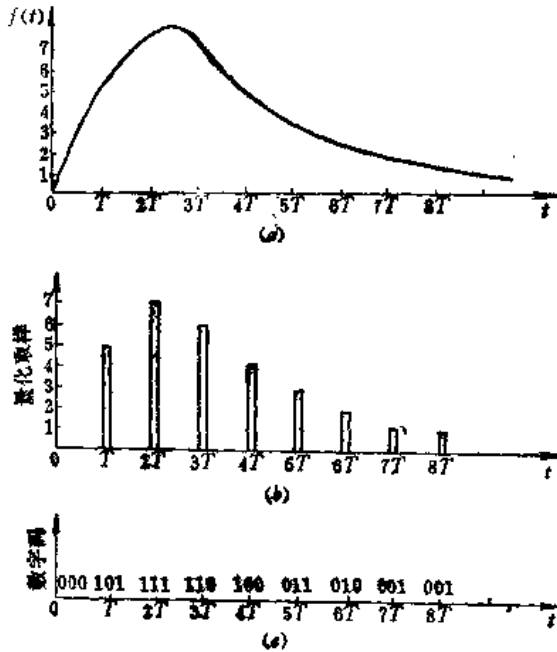


图 3-3-1 取样与数字转换过程

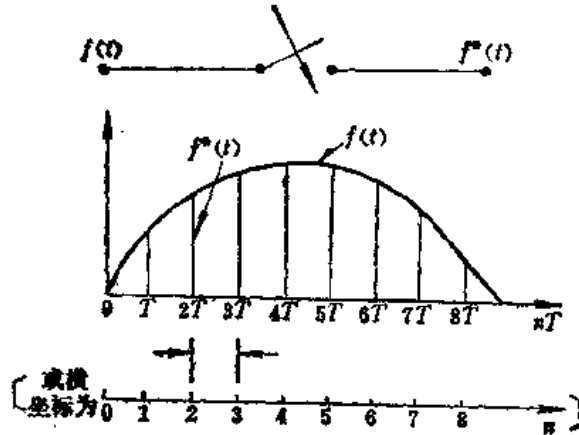


图 3-3-2 用开关表示取样过程

正量过程造成的误差叫作量化误差。量化误差可以表示为：

$$e_1 = f^*(t) - f(t)$$

在量化过程中，对剩余部分“ e_1 ”有两种处理方法，

(1) “只舍不入”的正量过程。这种正量过程的量化误差只有正值，它可以取 $0 \sim q_n$ (量化电平) 之间的任意值，最大误差 $e_{\max} = q$ 。

(2) “有舍有入”的正量过程。这种正量过程类似四舍五入的方法，即小于 $q/2$ 时舍去；大于 $q/2$ 时进入。正量误差有正有负，它可以取 $-q/2 \sim +q/2$ 之间，显然最大正量误差为 $|e_{\max}| = q/2$ 。

比较两种正量化的方法可知，当然是“有舍有入”的方法为好。在实际的捷联系统中，为了有效地减小量化误差，有人提出采取一些“抗量化措施”。例如，把量化的剩余量寄存起来，等到累计到一个量化值才进入。

2. 不可交换性误差

由于刚体的有限转动不是矢量，因此不能按矢量合成和分解的方法来处理转动。而实际捷联系统中使用的数据处理过程都是按照固定的顺序进行的，在每次更新姿态矩阵元素时，计算机的信息处理都是依次接收速率陀螺仪输出的角增量，以提取姿态角速率 ω_b ，而此顺序往往和载体的实际姿态角变化历程不相符合，这样就很自然地会产生不可交换误差。

减小不可交换性的方法，除了选择适当的计算方法之外，从根本上来说，只有减小

陀螺采样的角增量,即加大采样频率,使 $\Delta\theta$ 平方以上的各项小到完全可以忽略的程度。但是采样频率的提高会加大计算机的负担,所以对于实际捷联系统的设计,只能采取折衷的方法。

3. 截断误差

截断误差又称积分误差。它是微分方程式的数值近似积分所引起的。更新的方向余弦矩阵和四元数的微分方程式为:

$$\begin{aligned}\dot{T}_i^j &= T_i^j \omega_i^j \\ \dot{Q} &= -\frac{1}{2} Q \omega\end{aligned}$$

以求解四元数的微分方程式为例,其四元数的微分方程的解析解如式(3-2-5)所示。

$$q(t) = q(0) \cdot e^{1/2(\Delta\theta)}$$

由于 $\Delta\theta$ 是一个被测量速率的矢量,只有在时间间隔 $t_0 \rightarrow t$ 内矢量的方向在空间才是恒定的,此时其解析积分才正确。这种限制太严,以至于对于一个实用的捷联系统,这种解析解很少是正确的。因此在实际系统中需用一个截断的级数来估算其解:

$$\begin{aligned}e^{1/2(\Delta\theta)} &= I + \frac{[\Delta\theta]}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^3 \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^n + \dots\end{aligned}$$

其中

$$[\Delta\theta] = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

这里的 $\Delta\theta_x$ 、 $\Delta\theta_y$ 、 $\Delta\theta_z$ 分别由下式求得:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_x &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_x dt \\ \Delta\theta_y &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_y dt \\ \Delta\theta_z &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_z dt\end{aligned}$$

将上述各式代入级数展开式(取前三项)有:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} q_0^i \\ q_1^i \\ q_2^i \\ q_3^i \end{bmatrix} &= \left[I - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^2 I + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^4 I \right. \\ &\left. + \frac{[\Delta\theta]}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^3 \cdot \frac{[\Delta\theta]}{\Delta\theta_0} + \frac{1}{5!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^5 \frac{[\Delta\theta]}{\Delta\theta_0} \right] \begin{bmatrix} q_0^{i0} \\ q_1^{i0} \\ q_2^{i0} \\ q_3^{i0} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

显然，积分值是截断级数估算的，且解析解要求在积分间隔内输入速率为常数，所以说该积分运算常常是近似的。这因为本质上都是采用有限级数，而把高阶项截去，其截去部分就是截断误差，所以说低阶算法截断误差大，高阶算法截断误差小。从降低截断误差考虑，采用高阶算法为好。但高阶算法计算工作量大，增加了计算机负担。为减小计算机负担，应采用低阶算法，但又降低了计算精度，因此在实际捷联系统中，应把采用的算法阶次和采样频率予以统一考虑。高采样频率可以用低阶算法，采用频率较低时，可用较高阶算法。

4. 舍入误差

舍入误差是由于计算机的字长是有限的所造成的，在运算过程中计算机总会丢失一部分信息。一般说来，在定点计算机中，若表示数码的字长为 n 位，则它所表示的最小数为：

$$|N|_{\min} = \underbrace{0.00\dots 01}_{n \text{ 位}} = 2^{-n}$$

它所表示的最大数为：

$$|N|_{\max} = \underbrace{0.111\dots 11}_{n \text{ 位}} = 1 - 2^{-n}$$

所以说该计算机所能表示数的范围为：

$$2^{-n} \leq |N| \leq 1 - 2^{-n}$$

因此在计算机运算过程中，为了避免出现溢出现象，应找出恰当的“比例因子”，将可能产生溢出的数预先缩小，从而才能保证在整个运算过程中，所有数的绝对值均不超过计算机所能表示的最大值。这时当计算机中出现小于所能表示的最小数时，则机器就当作“零”来处理，也就是说所有小于计算机所能表示的最小数均被“舍”去了。被舍去的这些量所造成的误差，在运算过程称为舍入误差。

在浮点计算机中，若用 r 位表示阶码， m 位表示尾数，则该计算机所能表示的最小数为：

$$|N|_{\min} = 2^{-2^r+1} \times 2^{-m}$$

它能表示的最大数为：

$$|N|_{\max} = 2^{2^r-1} \times (1 - 2^{-m})$$

所以说浮点计算机所能表示数的范围为：

$$2^{-m} \cdot 2^{-2^r+1} \leq |N| \leq (1 - 2^{-m}) \cdot 2^{2^r-1}$$

虽然浮点计算机所能表示的数要比定点机大得多，但和定点计算机一样，当计算机中出现大于 $|N|_{\max}$ 的数时计算机就要溢出，而对于小于 $|N|_{\min}$ 的数则要舍去，因此在运算过程中同样会造成舍入误差。以上只是以捷联系统中用四元数算法出现的误差源进行了简要的分析。

三、捷联矩阵算法误差的分类

由于存在以上各种误差源，即使采用增大更新速率、双精度、增加输入存储器等措施，计算机经计算得到的捷联矩阵 \hat{T} 与理想的精确捷联矩阵 T 之间还是存在着算法误差。

采用对矩阵微分方程作数值积分方法处理,来计算得到的正交矩阵会产生所谓刻度、歪斜和漂移误差。下面先将刻度、歪斜和漂移误差给以定义和解释。这里先以两维的情况为例作一说明。图 3-3-3 所示的 X 、 Y 轴是正确地对准并相互垂直的,而 X' 、 Y' 轴系相对 X 、 Y 轴系转过 δ 角, X' 、 Y' 轴系仍然是垂直的,但作为一个坐标系它不再是正确地对准了,这就是所谓的漂移误差。

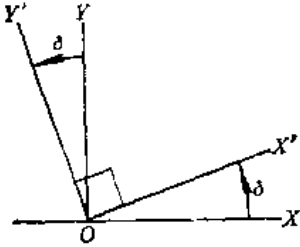


图3-3-3 漂移误差示意图

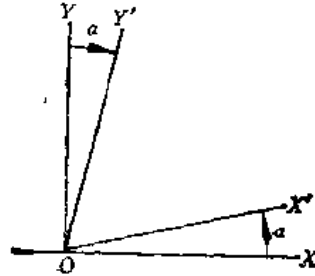


图3-3-4 歪斜误差示意图

在图 3-3-4 中, X' 、 Y' 两根轴转动不是同方向,而是朝相反方向转过角 α , 这样 X' 、 Y' 轴形成了一个平行四边形的两个边,而不是正方形的两个边了。在某种意义上, X' 、 Y' 坐标系仍可认为是正确对准的,只不过现在它是一个倾斜和歪斜的坐标系,而不是直角坐标系,这就是所谓的歪斜误差。

除了歪斜误差和漂移误差之外,还有第三类坐标系的扰动误差——称此为刻度误差。当 X' 、 Y' 轴分别与 X 、 Y 轴重合,而 X' 、 Y' 坐标系上长度单位矢量不具有单位长度时才存在单纯的刻度误差。

我们所讨论的计算机算法程序中应产生一个正交矩阵 T_i^j , 它是时间的函数,可由式 (3-2-13) 得到,即

$$\dot{T}_i^j = T_i^j \omega_i^j$$

本来 T_i^j 是可以由上述式子求得一精确解,但是数值积分的误差使计算机给出另一矩阵 \hat{T}_i^j , 它们之间的关系可将式 (3-2-13) 改写后来表示:

$$\dot{\hat{T}}_i^j = \hat{T}_i^j \omega_i^j + F(t) \quad (3-3-9)$$

其中 $F(t)$ 是扰动矩阵的强迫项,令 T_i^j 是真正的正交矩阵,而 \hat{T}_i^j 是计算机中 T_i^j 的样本, T_i^j 与 \hat{T}_i^j 的关系可以写成:

$$\hat{T}_i^j = T_i^j (I + H) \quad (3-3-10)$$

式中 I ——单位矩阵;

H ——任意矩阵,它表示了一个小的扰动,所以 H 视为一阶小量,而高阶小量将被忽略。

T_i^j 的正交条件,可以用数学式表示为:

$$(T_i^j)^T \cdot (T_i^j) = I$$

对于矩阵 \hat{T}_i^j , 同样有:

$$(\hat{T}_i^j)^T (\hat{T}_i^j) = (I + H)^T (I + H) \quad (3-3-11)$$

展开式 (3-3-11) 并保留 H 的一阶小量, 忽略 HH^T 项得到,

$$(T_i^{\wedge})^T (T_i^{\wedge}) = I + H + H^T \quad (3-3-12)$$

分解 H , 它的对称部分为 S , 而反对称部分为 U 。

$$H = S + U \quad (3-3-13)$$

由定义

$$\begin{cases} S = S^T \\ U = -U^T \end{cases} \quad (3-3-14)$$

由式 (3-3-13) 可得,

$$\begin{cases} H + H^T = 2S \\ H - H^T = 2U \end{cases} \quad (3-3-15)$$

这样, 式 (3-3-12) 可以重写成:

$$(T_i^{\wedge})^T (T_i^{\wedge}) = I + 2S \quad (3-3-16)$$

考虑到式 (3-3-10), 有:

$$(T_i^{\wedge})^T (T_i^{\wedge}) = I + S + U \quad (3-3-17)$$

仔细分析式 (3-3-16) 与式 (3-3-17), 可以得出如下结论:

(1) 矩阵 S 表现 T_i^{\wedge} 矩阵的非正交偏差, 因而 S 矩阵的各元素能够用以确定 T_i^{\wedge} 的比例和歪斜误差, 特别是 S 矩阵的对角线分量是比例误差, 而 S 矩阵的非对角线分量即是歪斜误差。

(2) 若 S 矩阵为零, 从式 (3-3-17) 可以看出: U 表示 T_i^{\wedge} 矩阵对 $(T_i^{\wedge})^T$ 矩阵的偏差。它表示了一个小的转动正交矩阵近似的等于单位矩阵 I 加上一个反对称矩阵 U 。这个结论和假定 $S = 0$ 时 T_i^{\wedge} 与 T_i^{\wedge} 是两个正交矩阵的假设相一致, 因而 U 矩阵中的元素能用作确定包含在 T_i^{\wedge} 中的漂移误差。

(3) 很明显, S 矩阵可以单独由 T_i^{\wedge} 矩阵的信息中计算得到, 亦即 T_i^{\wedge} 矩阵可以是未知的。

(4) 显然, 由于 U 表示 T_i^{\wedge} 矩阵相对 T_i^{\wedge} 的漂移, 所以计算 U 矩阵时要求 T_i^{\wedge} 与 T_i^{\wedge} 是已知的。

根据上述观点, T_i^{\wedge} 矩阵表示一个真正的矩阵, 而 T_i^{\wedge} 矩阵表示受扰动矩阵。事实上在计算程序中可以利用两种计算方案, 这样实际上可以得到两个 T_i^{\wedge} 样本, 而 T_i^{\wedge} 则保持为一个理想的样本。比较两个 T_i^{\wedge} 样本, 可将精度高的方案称方案 I, 而将低精度的称为方案 II, 将方案 I 得到的 T_i^{\wedge} 取代 T_i^{\wedge} 去计算 S 矩阵, 采用迭代的方法去估计被校正的矩阵的误差, 直到达到满意的精度为止。实际上, 应对计算得到的捷联矩阵进行正交化处理。

算法误差的存在还使计算得到的变换四元数失去了规范性, 研究四元数误差对与正交矩阵有关的刻度误差、歪斜与漂移误差的关系会发现用四元数计算得到的有关矩阵其歪斜误差必然为零, 而余下的刻度误差与漂移误差的消除则应对计算得到的变换四元数进行规范化处理。下面两节将分别仔细讨论方向余弦矩阵的正交化和变换四元数的规范化有关问题。

§ 3.4 捷联矩阵的最佳正交性分析

一、捷联矩阵正交性问题的引出

直角坐标系的坐标变换是正交变换，这是因为变换前的直角坐标系 OX, Y, Z 的单位矢量 i, j, k 是互相垂直的且模为 1，而变换后的直角坐标系 OX_b, Y_b, Z_b 的单位矢量 i_b, j_b, k_b 同样是互相垂直的且模为 1，而捷联矩阵 T_b 将坐标系 OX, Y, Z 转换到坐标系 OX_b, Y_b, Z_b ，即

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = T_b \begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix} \quad (3-4-1)$$

上式可以写成：

$$\left. \begin{aligned} i_r &= T_{11}i_b + T_{12}j_b + T_{13}k_b \\ j_r &= T_{21}i_b + T_{22}j_b + T_{23}k_b \\ k_r &= T_{31}i_b + T_{32}j_b + T_{33}k_b \end{aligned} \right\} \quad (3-4-2)$$

考虑到 i_r, j_r, k_r 为互相垂直的矢量，即有：

$$\left. \begin{aligned} i_r \times j_r &= k_r \\ j_r \times k_r &= i_r \\ k_r \times i_r &= j_r \end{aligned} \right\} \quad (3-4-3)$$

将式 (3-4-2) 代入式 (3-4-3)，可得：

$$\left. \begin{aligned} (T_{11}i_b + T_{12}j_b + T_{13}k_b) \times (T_{21}i_b + T_{22}j_b + T_{23}k_b) &= T_{31}i_b + T_{32}j_b + T_{33}k_b \\ (T_{21}i_b + T_{22}j_b + T_{23}k_b) \times (T_{31}i_b + T_{32}j_b + T_{33}k_b) &= T_{11}i_b + T_{12}j_b + T_{13}k_b \\ (T_{31}i_b + T_{32}j_b + T_{33}k_b) \times (T_{11}i_b + T_{12}j_b + T_{13}k_b) &= T_{21}i_b + T_{22}j_b + T_{23}k_b \end{aligned} \right\}$$

对以上三个式子的左边进行矢量运算，并令对应单位矢量的系数相等，可得以下九个方程：

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32} \\ T_{12} &= T_{23}T_{31} - T_{21}T_{33} \\ T_{13} &= T_{21}T_{32} - T_{22}T_{31} \\ T_{21} &= T_{32}T_{13} - T_{33}T_{12} \\ T_{22} &= T_{33}T_{11} - T_{31}T_{13} \\ T_{23} &= T_{31}T_{12} - T_{32}T_{11} \\ T_{31} &= T_{12}T_{23} - T_{13}T_{22} \\ T_{32} &= T_{13}T_{21} - T_{11}T_{23} \\ T_{33} &= T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \end{aligned} \right\} \quad (3-4-4)$$

式 (3-4-4) 表明捷联矩阵 T 的任一元素都等于其代数余子式，这是正交变换所必须满足的条件，同理有：

$$\left. \begin{aligned} i_r \cdot i_r = j_r \cdot j_r = k_r \cdot k_r &= 1 \\ i_r \cdot j_r = j_r \cdot k_r = k_r \cdot i_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-4-5)$$

上述式子给出了另一组正交变换所需满足的条件，将式(3-4-2)代入式(3-4-5)后展开可得以下六个方程：

$$\left. \begin{aligned} T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2 &= 1 \\ T_{21}^2 + T_{22}^2 + T_{23}^2 &= 1 \\ T_{31}^2 + T_{32}^2 + T_{33}^2 &= 1 \\ T_{11}T_{21} + T_{12}T_{22} + T_{13}T_{23} &= 0 \\ T_{21}T_{31} + T_{22}T_{32} + T_{23}T_{33} &= 0 \\ T_{31}T_{11} + T_{32}T_{12} + T_{33}T_{13} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-4-6)$$

式(3-4-6)也是正交变换所必须满足的条件。

由以上给出的正交条件可以证明：

$$|T_{ij}^i| = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = T_{11}A_{11} + T_{12}A_{12} + T_{13}A_{13}$$

式中 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{13} 分别为 T_{11} 、 T_{12} 、 T_{13} 的代数余子式，由式(3-4-4)可以将上式写成：

$$|T_{ij}^i| = T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2$$

再由式(3-4-6)可得 $|T_{ij}^i| = 1$ 。

由正交矩阵的定义 $(T_{ij}^i)^{-1} = (T_{ij}^i)^T$ ，从而有：

$$\begin{aligned} (T_{ij}^i)^{-1} &= \frac{\text{adj} T_{ij}^i}{|T_{ij}^i|} = \text{adj} T_{ij}^i \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} = (T_{ij}^i)^T \end{aligned} \quad (3-4-7)$$

这就证明了直角坐标系的坐标变换为正交变换，即实现了这一变换的捷联矩阵 T_{ij}^i 为正交矩阵。那么人们自然会提出这样一个实际问题，即对捷联系统中计算机软件求出的捷联矩阵 T_{ij}^i 是否还是正交矩阵呢？这就是捷联矩阵 T_{ij}^i 的正交化问题。如果 T_{ij}^i 不是正交矩阵，则通过 T_{ij}^i 进行变换后得到的矢量的大小和方向就会出现误差，事实上由于前述的算法误差的存在，计算得到的捷联矩阵 T_{ij}^i 往往不再是正交矩阵，即

$$(T_{ij}^i) (T_{ij}^i)^{-1} \neq I$$

其中 I 为单位矩阵；符号“ \wedge ”表示“计算”的意思； T_{ij}^i 表明是计算出来的捷联矩阵，它与理想的捷联矩阵 T_{ij}^i 之间存在着误差。为了减少捷联矩阵不正交所造成的误差，需要将非正交矩阵 T_{ij}^i 转换为正交矩阵 T_{ij}^i 。这一过程就需要通过正交化技术来完成。

正交化问题是捷联式惯性导航系统所特有的问题，它是由于“数学解析平台”所引起的。对于平台式惯性导航系统由于存在着实体的平台，平台坐标系的互相垂直正交是靠平台与加速度计的加工、装配工艺来保证的，而捷联系统中就变成了实施正交化的软件程序来实现。理论分析与仿真研究都表明捷联矩阵的正交化技术并不复杂，这样就为降低捷联系统的成本创造了条件。

但是实现正交化本身不是最终目的，获得漂移误差最小的正交化矩阵才具有实际意

义, 因为往往不好的正交化方法是以加大漂移误差为代价。那么用什么方法来衡量正交化的优劣呢? 一般都采用漂移误差最小为指标。这里的所谓漂移误差是指对非正交矩阵 T_b^i 进行正交化处理后得到的正交化矩阵 T_b^o 所代表的平台坐标系, 这里用矩阵 T_b^o 代替 T_b^i , 显然理想矩阵 T_b^i 周围必定存在着无穷多个矩阵 T_b^o 。

我们知道, 由理想矩阵 T_b^i 进行坐标变换可得:

$$\begin{bmatrix} i_p \\ j_p \\ k_p \end{bmatrix} = T_b^i \begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix}$$

而由矩阵 T_b^o 进行坐标变换后可得:

$$\begin{bmatrix} i_p \\ j_p \\ k_p \end{bmatrix} = T_b^o \begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix}$$

比较上述二式可得:

$$\begin{bmatrix} i_p \\ j_p \\ k_p \end{bmatrix} = T_b^o (T_b^i)^{-1} \begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix}$$

显然, 当 $T_b^o (T_b^i)^{-1} = I$ 时, 由 T_b^o 得到的平台坐标系即代表了理想地理坐标系, 为此我们可将漂移误差矩阵 E 定义为:

$$E = T_b^o (T_b^i)^{-1} - I \quad (3-4-8)$$

我们希望得到漂移误差最小的正交矩阵, 这就是捷联矩阵的正交化问题。

为了书写方便并使分析结果更有一般性, 这里引用误差评价函数的概念。用“ T ”表示理想的变换矩阵, 用“ \hat{T} ”表示计算得到的变换矩阵。这里将矩阵的上下标省掉, 则理想矩阵和计算矩阵的差值为 $\Delta T = T - \hat{T}$ 。取 ΔT 的范数为评价函数, 即

$$\|\Delta T\| = \|T - \hat{T}\| = \{T, [(T - \hat{T})^T (T - \hat{T})]\}^{1/2} \quad (3-4-9)$$

式中符号“ T ”为矩阵的“迹”。

将 \hat{T} 表示为:

$$\hat{T} = T(I + E) \quad (3-4-10)$$

将式 (3-4-10) 代入式 (3-4-9) 得:

$$\|\Delta T\| = \|T - \hat{T}\| = \{T, [T - T(I + E)]^T [T - T(I + E)]\}^{1/2}$$

展开并化简得:

$$\|\Delta T\| = \|T - \hat{T}\| = \{T, (E^T E)\}^{1/2} \quad (3-4-11)$$

式 (3-4-11) 表明, 用 E 可以表示计算的变换矩阵 \hat{T} 偏离其理想变换矩阵 T 的程度。

二、捷联矩阵的最佳正交化

对于用四元数法或用方向余弦法求得的捷联矩阵在进行正交化时所依据的原始数据是:

$$\hat{T}_{ij} (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$$

$$D = \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\hat{T}_{ij} - \hat{T}_{ij})^2 \right]^{1/2} \quad (3-4-12)$$

式中矩阵 \hat{T}_{ij} 是以 D 最小为指标而获得的, 参考文献〔1〕已证明为使 D 为最小的正交矩阵应满足

$$\hat{T} = \pm \hat{T}(\hat{T}^T \hat{T})^{-1/2}$$

由于对上式直接求解很困难, 因此可以用迭代法求解。设 T_0 为矩阵 \hat{T} 的初始值, T_n 为第 n 次迭代所得到的矩阵, 迭代的过程可描述如下:

$$T_0 = \hat{T}$$

$$T_{n+1} = T_n - 0.5(T_n \hat{T}^T T_n - \hat{T})$$

若在第 $n+1$ 次迭代能使测距函数

$$f_n = D_n^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\hat{T}_{ij} - T_{ijn})^2$$

且满足

$$|f_{n+1} - f_n| \leq \epsilon$$

则可将 T_{n+1} 作为 \hat{T} 而停止迭代计算, 式中 ϵ 为根据正交化的精度而选取的小量 (如 ϵ 取 10^{-6})。计算机仿真计算表明对 ϵ 取 10^{-6} 的精度, 一般只需要迭代 3—5 次即可满足要求。

§ 3.5 变换四元数的最佳归一化分析

四元数法的计算误差分析和捷联矩阵的情况类似, 可用“ Q ”表示理想的变换四元数, 而用“ \hat{Q} ”表示计算的四元数。由捷联矩阵的即时修正求得的 $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$ 代入式(3-3-2), 则可以求得捷联矩阵 $T_{ij}^{\hat{Q}}$, 并由 $T_{ij}^{\hat{Q}}$ 可求得有关元素, 并有:

$$\hat{T}_{11}^{\hat{Q}} + \hat{T}_{12}^{\hat{Q}} + \hat{T}_{13}^{\hat{Q}} = (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2) + 4(\hat{q}_1\hat{q}_2 - \hat{q}_0\hat{q}_3) + 4(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2)$$

将上述式子展开并化简有:

$$\hat{T}_{11}^{\hat{Q}} + \hat{T}_{12}^{\hat{Q}} + \hat{T}_{13}^{\hat{Q}} = (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)$$

同理有:

$$\hat{T}_{21}^{\hat{Q}} + \hat{T}_{22}^{\hat{Q}} + \hat{T}_{23}^{\hat{Q}} = (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)$$

$$\hat{T}_{31}^{\hat{Q}} + \hat{T}_{32}^{\hat{Q}} + \hat{T}_{33}^{\hat{Q}} = (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)$$

当采用四元数 Q 来表示转动时, 则根据转动的四元数变换定理可知, 当起始时刻取 Q_0 为单位四元数, 则 Q 应恒为单位四元数, 即应满足以下约束方程:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (3-5-1)$$

但由于计算误差的存在, 破坏了式(3-5-1)的约束条件, 使得:

$$\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 \neq 1$$

从而使归一化条件不再存在。

再由式(3-3-2)求得 \hat{T} 的有关元素, 进而可得,

$$\begin{aligned} \hat{T}_{11}\hat{T}_{21} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{22} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{23} &= 2(\hat{q}_1\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{q}_3)(\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2) \\ &+ 2(\hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2)(\hat{q}_1\hat{q}_2 - \hat{q}_0\hat{q}_3) \\ &+ 2(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2) \times 2(\hat{q}_2\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_1) \end{aligned}$$

将上述式子展开并化简为:

$$\hat{T}_{11}\hat{T}_{21} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{22} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{23} = 0$$

同理可得,

$$\hat{T}_{11}\hat{T}_{31} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{32} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{33} = 0$$

$$\hat{T}_{21}\hat{T}_{31} + \hat{T}_{22}\hat{T}_{32} + \hat{T}_{23}\hat{T}_{33} = 0$$

以上三个式子表明, 对于四元数法, 不论计算误差有多大, 其正交性条件永远成立。

综上所述可以看出, 对于四元数法正交性条件永远成立。由于式 (3-5-1) 的约束方程受到破坏, 从而使归一化条件不再成立。通过归一化处理, 得到 $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$, 使之重新满足归一化条件, 即

$$\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 = 1 \quad (3-5-2)$$

于是归一化条件重又成立。显然, 它将四元数法正交化问题简化为归一化问题。而对于四元数进行归一化处理时, 只要使一个破坏了的约束方程得到恢复即可, 因而归一化的设计计算就显得简单。在归一化处理中, 可以消除一部分即时修正的算法误差的影响, 又不会引入更多的新计算误差, 因而其漂移误差也较小。

四元数的最佳归一化, 令即时修正获得的四元数 \hat{Q} 为:

$$\hat{Q} = \hat{q}_0 + \hat{q}_1 i_b + \hat{q}_2 j_b + \hat{q}_3 k_b$$

\hat{Q} 的模为:

$$\sqrt{N_{\hat{Q}}} = \sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2} \quad (3-5-3)$$

将四元数 \hat{Q} 除以它的模 $\sqrt{N_{\hat{Q}}}$ 可得:

$$\hat{Q} = \frac{\hat{Q}}{\sqrt{N_{\hat{Q}}}} = \frac{\hat{q}_0 + \hat{q}_1 i_b + \hat{q}_2 j_b + \hat{q}_3 k_b}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}} = \hat{q}_0 + \hat{q}_1 i_b + \hat{q}_2 j_b + \hat{q}_3 k_b \quad (3-5-4)$$

式中

$$\hat{q}_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{N_{\hat{Q}}}} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (3-5-5)$$

求式 (3-5-4) 所表示的四元数的模方, 可得:

$$\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 = 1$$

显然利用式 (3-5-4) 可以实现四元数的归一化, 从而也就是完成了捷联矩阵 T_b^i 的正交化。

现在来证明式 (3-5-4) 就是欧几里得范数最小意义下的最佳归一化。这里首先应明确“最佳”的含义, 即在进行归一化时取什么作为最佳指标。由于归一化所依据的原始数据是 \hat{Q} , 而理想的四元数 Q 虽然客观上是存在的, 但是计算时则无法获得, 只能尽可能地接近它。根据最小二乘拟合的原则, 我们取四元数 \hat{Q} 与 Q 之间的欧几里得范数 D 最小作为最佳归一化的指标, D 最小的含义是使正变化后获得的 \hat{Q} 与作为正变化依据的 Q 之间欧几里得距离最小, 从而达到使漂移误差最小的目的。

定义:

$$D = \left[\sum_{i=0}^3 (\hat{q}_i - q_i)^2 \right]^{1/2} \quad (3-5-6)$$

设距离函数

$$D^2 = \sum_{i=0}^3 (\hat{q}_i - \dot{q}_i)^2 \quad (3-5-7)$$

它受到单位四元数的约束条件的约束, 即

$$g = \sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2 - 1 = 0 \quad (3-5-8)$$

用拉格朗日乘法, 求在约束条件下的极值, 定义一个 ϕ 函数为:

$$\phi = D^2 + \lambda g \quad (3-5-9)$$

式中 λ 是未知的拉格朗日乘子, 将式 (3-5-7) 与式 (3-5-8) 代入式 (3-5-9) 得:

$$\phi = \sum_{i=0}^3 (\hat{q}_i - \dot{q}_i)^2 + \lambda \left(\sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2 - 1 \right) \quad (3-5-10)$$

显然, 使 D^2 或 D 最小的 \dot{q} 应使 ϕ 最小。为了求 \dot{q}_i , 将 ϕ 对 \dot{q}_i 求偏导, 并使其等于零, 由式 (3-5-10) 则可得:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i} = -2(\hat{q}_i - \dot{q}_i) + 2\lambda \dot{q}_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

因此有

$$\dot{q}_i = \frac{\hat{q}_i}{1 + \lambda} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (3-5-11)$$

将式 (3-5-11) 代入式 (3-5-8) 得:

$$\sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2 / (1 + \lambda)^2 = 1 \quad (3-5-12)$$

由上式可得:

$$\frac{1}{1 + \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}} \quad (3-5-13)$$

将式 (3-5-13) 代入式 (3-5-11) 有:

$$\dot{q}_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}$$

上式即式 (3-5-5)。这就证明了通过式 (3-5-4) 进行的归一化就是使欧几里得范数 D 为最小的最佳归一化。

第四章 捷联式惯性导航系统的初始对准

§ 4.1 惯性导航系统初始对准的一般要求和原理

从惯性导航系统的原理可知,舰船的位置是由系统中的加速度计测得的加速度经两次积分而求得。要进行积分必须知道初始条件,例如初始速度和初始位置。而对捷联式惯性导航系统中初始对准的另一个关键问题是要在较短的时间内以一定的精度确定出从载体坐标系到地理坐标系的初始变换矩阵 $T_i(0)$ 。这是因为在捷联系统中惯性敏感器直接测量得到的是载体相对惯性坐标系的各轴向的加速度大小,而捷联系统数学解析平台软件程序中所需要的应是载体坐标系相对地理坐标系的加速度信息。

初始对准可以是不依赖外部设备的自主式的,也可以是依赖某些外部设备的受控式的,有时也可采用自主式和受控式相结合的方法。由于舰船导航用的惯性导航系统大多选用与地球固联的参考坐标,所以借助于惯性敏感器测量的两个在空间不共线的矢量,即地球自转速率 ω_e 和地球重力矢量 g 来实现自主式对准是很方便的。自主式对准包括水平对准和方位对准。

舰船用捷联惯性导航系统的自对准可以分两步进行。在粗对准阶段,用重力矢量 g 和地球自转速率 ω_e 的测量值,直接估算载体坐标系到地理坐标系的变换矩阵。在精对准阶段,可以通过处理惯性敏感器的输出信息,精确校正计算参考坐标系与真实参考坐标系之间的小失准角,从而建立起准确的初始变换矩阵 $T_i(0)$ 。

一、初始对准的一般要求

初始对准的要求,一般应包括精度和快速性两个方面。为了满足高精度要求,希望惯性敏感器具有尽可能高的精度和稳定性,并希望系统能对外界干扰不敏感,即整个系统的鲁棒性要好。为提高捷联系统的精度,还希望初始对准能对陀螺漂移、加速度计零位误差以及它们的标度系数进行测定和补偿。要使系统具有较好的抗干扰能力,还应采用频谱分析技术、滤波技术,将有用信息和干扰信号从时域和频率域上加以分离。显然上述措施的实现,都需要容量大速度高的计算机给以保证。很明显,精度和快速性这两方面的要求是互相矛盾的,因此需要合理地进行系统设计,尽可能兼顾这两方面的要求,以期求得满意的效果。

二、捷联系统初始对准的原理

捷联系统如何利用惯性敏感器测得的 ω_e 与 g 来精确求得初始变换矩阵呢?它与稳定平台式系统不同,稳定平台式系统的初始对准就是以一定的控制方法,使具有常平架的平台与当地地理坐标系一致起来。而对于捷联式系统初始对准的实质是确定捷联矩阵的初始值。由于捷联系统中惯性敏感器直接固联在载体上,这就有着不同于稳定平台式系统的特殊性。

在静基座情况下,可以直接利用地理坐标系上重力矢量 \mathbf{g} 和地球自转速率 ω_{ie} 的已知值以及惯性传感器对 \mathbf{g} 与 ω_{ie} 的测量值 \mathbf{g}^b 、 ω_{ie}^b 来计算捷联矩阵 $T_i^b(0)$ 。

我们知道,对于某一纬度 φ 有:

$$\mathbf{g}^i = (0 \ 0 \ -g)^T \quad (4-1-1)$$

$$\omega_{ie}^i = (0 \ \omega_{ie} \cos \varphi \ \omega_{ie} \sin \varphi)^T \quad (4-1-2)$$

用 \mathbf{g} 、 ω_{ie} 可以构成一个新的矢量 \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{g} \times \omega_{ie} \quad (4-1-3)$$

根据载体坐标系与地理坐标系的变换矩阵 T_i^b 可以得:

$$\mathbf{g}^i = T_i^b \mathbf{g}^b \quad (4-1-4)$$

$$\omega_{ie}^i = T_i^b \omega_{ie}^b \quad (4-1-5)$$

$$\mathbf{E}^i = T_i^b \mathbf{E}^b \quad (4-1-6)$$

考虑到捷联矩阵 T_i^b 具有正交性,即有:

$$(T_i^b)^T = (T_i^b)^{-1}$$

故 T_i^b 可表示成:

$$T_i^b = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^i)^T \\ (\omega_{ie}^i)^T \\ (\mathbf{E}^i)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\omega_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{E}^b)^T \end{bmatrix} \quad (4-1-7)$$

式中 \mathbf{g}^b 、 ω_{ie}^b 是由加速度计、陀螺仪直接测得的,而 \mathbf{E}^b 、 \mathbf{E}^i 应由式(4-1-6)计算得到。

实际应用中,捷联系统工作在具有各种噪声扰动的动态环境中,直接利用式(4-1-7)的静基座算法将会产生很大的误差,最后导致捷联系统工作失败。

实际应用时系统应以如下机械编排进行工作。采用稳定系统控制原理,以重力矢量 \mathbf{g} 和地球自转速率 ω_{ie} 为控制信号,使捷联系统稳定在地理坐标系上。捷联矩阵 T_i^b (又称姿态矩阵)可以形象地理解成数学解析平台,系统中的数学解析平台的水平及方位失准角作为系统的负反馈信息以一定的控制算法,使数学解析平台工作在具有较好的动态特性和稳态特性的工作状态。

数学解析平台的工作过程与稳定平台式系统类似,当数学解析平台有方位失准角 ψ 时,则地球自转角速率分量 $\omega_{ie} \cos \varphi \sin \psi$ 就耦合到解析平台的东轴上,从而产生了著名的罗经效应。其中罗经效应项 $\omega_{ie} \cos \varphi \sin \psi$ 就使数学解析平台绕东西轴旋转,从而产生水平倾斜角 α 。解析系统利用这一控制信息,一方面控制解析平台减小水平倾斜角;另一方面又控制解析平台减小方位失准角,从而使数学解析平台能稳定在地理坐标系上。其稳定过程是以如下数学公式进行的。

$$\dot{T}_i^b = T_i^b \hat{\omega}_{ie}^b \quad (4-1-8)$$

式中 T_i^b 表示计算地理坐标系 (i 系) 和载体坐标系 (b 系) 间的方向余弦矩阵,即为计算的捷联矩阵,它同样起着平台作用。

$\hat{\omega}_{ie}^b$ 是 ω_{ie}^b 的反对称矩阵。

$$\omega_{i,b}^{b,e} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\omega}_{i,b}^{b,e} & \hat{\omega}_{i,b}^{b,e} \\ \hat{\omega}_{i,b}^{b,e} & 0 & -\hat{\omega}_{i,b}^{b,e} \\ -\hat{\omega}_{i,b}^{b,e} & \hat{\omega}_{i,b}^{b,e} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-1-9)$$

$$\omega_{i,b}^b = (\hat{\omega}_{i,b}^{b,e} \quad \hat{\omega}_{i,b}^{b,e} \quad \hat{\omega}_{i,b}^{b,e})^T \quad (4-1-10)$$

$$\omega_{i,b}^b = \tilde{\omega}_{i,b}^b - \omega_{i,b}^b - \omega_{i,b}^b - \omega_{i,b}^b \quad (4-1-11)$$

式中 $\tilde{\omega}_{i,b}^b$ ——陀螺仪对载体相对惯性空间运动角速度量测值；

$\omega_{i,b}^b$ ——地球坐标系（ e 系）相对惯性坐标系的运动角速度在载体坐标上的投影；

$\omega_{i,b}^b$ ——地理坐标系（ t 系）相对地球坐标系（ e 系）的运动角速度在载体坐标系上的投影；

$\omega_{i,b}^b$ ——解析平台稳定控制的控制角速度，它是以水平姿态误差角 α 、 β 为控制信息。

对方程（4-1-8）不断进行积分运算，形了解析平台在地理坐标系上的稳定过程。

捷联式惯性导航系统的计算姿态矩阵 T_i^b 与真实姿态矩阵 T_i^b 的误差，可以直接由数学解析平台的不对准误差角来表示。当误差角较小时，可以通过 ϕ 来表示 T_i^b 与 T_i^b 之间的误差，称 ϕ 为捷联系统中不对准角 ϕ 的反对称矩阵。

$$\phi = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T$$

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (4-1-12)$$

这里的 ϕ 为计算地理坐标系与真实地理坐标系的误差角（又称捷联系统中不对准角）。其中 β 、 α 、 γ 分别为计算地理坐标系与真实地理坐标系的东向、北向、方位的误差角。

令计算地理坐标系（ i 系）和真实地理坐标系（ t 系）重合，经过三次转动得到（ \hat{i} 系）：

$$OX_t Y_t Z_t \xrightarrow[\text{OZ}]{\gamma} OX' Y' Z' \xrightarrow[\text{OX}']{\alpha} OX'' Y'' Z'' \xrightarrow[\text{OY}']{\beta} OX_{\hat{i}} Y_{\hat{i}} Z_{\hat{i}}$$

类似求 T_i^b 的过程，可以方便地求得 $T_{\hat{i}}^b$ ，如图 4-1-1 所示。

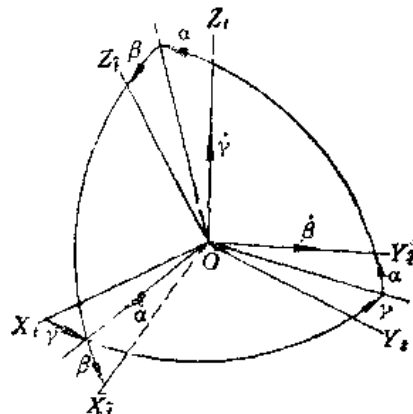


图 4-1-1 误差角坐标变换图

$$T_i^i = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \\ \cos \gamma \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

当误差角 α 、 β 、 γ 为小角度时，忽略高阶小量，则有：

$$T_i^i = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} = I - \Phi^i \quad (4-1-13)$$

所以可得：

$$T_i^{\hat{i}} = T_i^i \cdot T_i^i = (I - \Phi^i) T_i^i \quad (4-1-14)$$

当没有量测误差和干扰噪声时，就可以利用式 (4-1-7) 确定 $T_i^{\hat{i}}$ 的初始值。然而由于舰船始终处于摇摆状态，且系统的惯性敏感器一般很难安装在舰船的摇摆中心，这样就不可避免地在量测的线加速度中耦合进了舰船有害加速度，从而形成量测干扰误差。而当舰船系泊或匀速直线航行时，加速度计的量测干扰为一组短周期、均值为零的信号组合。

捷联系统初始对准的基本思路是，通过处理加速度计和陀螺仪的量测值，产生修正角速度 ω ，以供捷联矩阵的更新计算，并驱使不对准角尽可能减为零。与此同时，以陀螺仪的量测输出估计计算出舰船摇摆角速度，对舰船摇摆的角度进行隔离。其原理示意图如图 4-1-2 所示。

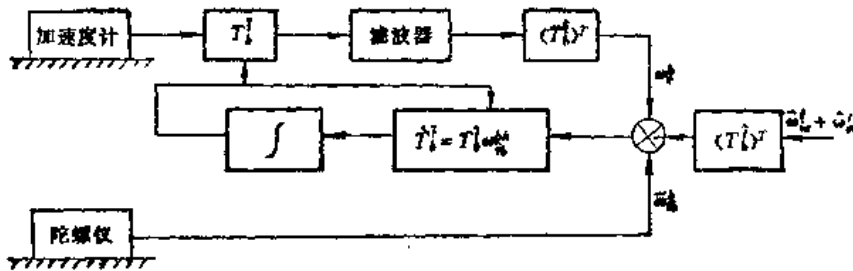


图 4-1-2 对准原理示意图

捷联矩阵的对准更新仍然基于式 (4-1-8) 进行的，即

$$\dot{T}_i^i = T_i^i \hat{\omega}_{i,i}^i$$

式中 $\hat{\omega}_{i,i}^i$ 为 $\hat{\omega}_{i,i}^i$ 的反对称矩阵，即如前所述。其中：

$$\hat{\omega}_{i,i}^i = \tilde{\omega}_{i,i}^i - (\hat{\omega}_{i,i}^i + \hat{\omega}_{i,i}^i) \quad (4-1-15)$$

这里

$\tilde{\omega}_{i,i}^i$ ——陀螺仪的量测值， $\tilde{\omega}_{i,i}^i = \varepsilon + \omega_{i,i}^i$ ；

ε ——陀螺仪的随机漂移；

$\omega_{i,i}^i$ ——载体坐标系相对惯性坐标系的角速度在载体坐标系的投影；

$\hat{\omega}_{i,i}^i \triangleq T_i^i \omega_{i,i}^i$ ；

$\omega_{i,i}^i$ ——地球自转角速度；

$\hat{\omega}_{i,i}^i \triangleq T_i^i \omega_{i,i}^i$ ；

$$\omega_{e'}^b = \omega_{b'}^b$$

在静基座理想情况下, $V=0$, $\omega_{e'}=0$, $\omega_{e''}=0$, 且没有量测误差, 可得,

$$\omega_{b'}^b = 0$$

由式 (4-1-8) 可得 T_b^i 为常数。

在实际的捷联系统中、由于船体摇摆产生的干扰角速度 ω_e ($\omega_e^b \triangleq \omega_{e'}^b$) 以及由舰船绕地球表面航行速度所产生的角速度 $\omega_{e''}$ 的存在, 使式 (4-1-8) 中的 $\omega_{b'}^b$ 不为零, 而是,

$$\hat{\omega}_{b'}^b = \omega_{b'}^b + \omega_{e''}^b = \omega_e^b + \omega_{e''}^b \quad (4-1-16)$$

式中 ω_e^b ——干扰角速度在 b 系的投影 ($\omega_{b'}^b = \omega_e^b$);

$\omega_{e''}^b$ ——加速度计和陀螺仪的量测值经过处理后形成的对准修正角速度。

$\omega_{e''}^b$ 的大小一般是通过陀螺仪的量测值来估算的。

当舰船在地球表面航行, 则舰船上的流动地理坐标系 (也即计算地理坐标系相对地球坐标系的角速度 $\hat{\omega}_{i'}^i$; 通过测量舰船速度后是可以计算求得的。若知道当地地理纬度 φ 时, 则可以得出地理坐标系相对惯性坐标系的运动角速度在地理坐标系上的估计值。

$$\hat{\omega}_{i'}^i = \hat{\omega}_{i'}^i + \hat{\omega}_{e''}^i$$

写成 \hat{i} 系的投影形式有,

$$\hat{\omega}_{i'}^i = (\hat{\omega}_{i'}^{\hat{i}} \quad \hat{\omega}_{i'}^{\hat{j}} \quad \hat{\omega}_{i'}^{\hat{k}})^T = \left(-\frac{\tilde{V}_y}{R} \omega_{e''} \cos \tilde{\varphi} + \frac{\tilde{V}_x}{R} \omega_{e''} \cos \tilde{\varphi} + \frac{\tilde{V}_z}{R} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \right) \quad (4-1-17)$$

这里利用现有的 T_b^i 可将 $\hat{\omega}_{i'}^i$ 方便地转换到载体坐标系上, 即得,

$$\hat{\omega}_{b'}^b = (T_b^i)^T \hat{\omega}_{i'}^i \quad (4-1-18)$$

事实上, 陀螺仪的量测值 $\tilde{\omega}_{b'}^b$ 应为舰船相对惯性空间运动角速度 $\hat{\omega}_{b'}^b$ 与量测噪声 $\delta\omega_{b'}^b$ 的和, 即,

$$\tilde{\omega}_{b'}^b = \omega_{b'}^b + \delta\tilde{\omega}_{b'}^b = \omega_{i'}^b + \omega_{e''}^b + \delta\tilde{\omega}_{b'}^b = \omega_{i'}^b + \omega_{e''}^b + \delta\tilde{\omega}_{b'}^b \quad (4-1-19)$$

若欲求计算 $\omega_{e''}^b$, 则可以先忽略 $\delta\tilde{\omega}_{b'}^b$, 由式 (4-1-19) 得,

$$\omega_{e''}^b \triangleq \tilde{\omega}_{b'}^b - \hat{\omega}_{b'}^b$$

当以 $\hat{\omega}_{b'}^b$ 代替 $\omega_{b'}^b$ 代入式 (4-1-16), 可得,

$$\hat{\omega}_{b'}^b = \omega_e^b + \omega_{e''}^b = \omega_e^b + \omega_{b'}^b - \hat{\omega}_{b'}^b = \omega_e^b + \omega_{i'}^b + \omega_{e''}^b + \delta\tilde{\omega}_{b'}^b - \hat{\omega}_{b'}^b \quad (4-1-20)$$

类似式 (4-1-20) 可改写成,

$$\hat{\omega}_{b'}^b = \omega_e^b + \omega_{i'}^b + \omega_{e''}^b + \delta\tilde{\omega}_{b'}^b - \hat{\omega}_{b'}^b \quad (4-1-21)$$

由式 (4-1-18), 有,

$$\hat{\omega}_{i'}^i = (T_b^i)^T \hat{\omega}_{b'}^b = (T_b^i T_b^i)^T \hat{\omega}_{i'}^i = T_b^i T_b^i \hat{\omega}_{i'}^i = T_b^i (I + \Phi) \hat{\omega}_{i'}^i = \hat{\omega}_{i'}^i + \Phi^b \hat{\omega}_{i'}^i \quad (4-1-22)$$

将式 (4-1-22) 代入式 (4-1-21), 有,

$$\hat{\omega}_{b'}^b = \omega_e^b + \omega_{i'}^b + \omega_{e''}^b + \delta\tilde{\omega}_{b'}^b - \hat{\omega}_{i'}^i - \Phi^b \hat{\omega}_{i'}^i = \omega_e^b + \omega_{e''}^b + \delta\tilde{\omega}_{b'}^b - \Phi^b \hat{\omega}_{i'}^i - \delta\hat{\omega}_{i'}^i \quad (4-1-23)$$

把上式中 $\delta\omega_{ij}^b$ 表示为,

$$\delta\hat{\omega}_{ij}^b \triangleq \hat{\omega}_{ij}^b - \omega_{ij}^b \quad (4-1-24)$$

而 $\delta\omega_{ij}^b$ 可由 $\delta\omega_{ij}^s$ 转换得到, 即

$$\delta\omega_{ij}^b = T_{ij}^b \delta\omega_{ij}^s \quad (4-1-25)$$

其中

$$\delta\omega_{ij}^s = (\delta\omega_{ix}^s \ \delta\omega_{iy}^s \ \delta\omega_{iz}^s)^T = \left(-\frac{\delta V_{ix}}{R} \ \frac{\delta V_{iy}}{R} - \omega_{iz} \sin \hat{\varphi} \delta \hat{\varphi} \right. \\ \left. \frac{\delta V_{ix}}{R} \operatorname{tg} \hat{\varphi} + \frac{V_{iy}}{R} \sec \hat{\varphi} \delta \hat{\varphi} + \omega_{iz} \cos \hat{\varphi} \delta \hat{\varphi} \right)^T \quad (4-1-26)$$

式中 δV_{ix} ($i = x, y$)——外测速度测量误差,

$\delta \hat{\varphi}$ ——地理纬度误差,

将式 (4-1-13) 与式 (4-1-14) 微分, 有:

$$\dot{\hat{T}}_i^b = -\Phi' \quad (4-1-27)$$

$$\dot{\hat{T}}_i^s = \dot{\hat{T}}_i^s T_{ij}^s + T_{ij}^s \dot{\hat{T}}_i^s \quad (4-1-28)$$

将式 (4-1-2) 代入式 (4-1-28), 有:

$$\Phi' T_{ij}^s = T_{ij}^s \dot{\hat{T}}_i^s - \dot{\hat{T}}_i^s$$

将式 (4-1-8) 代入上述等式, 有:

$$\Phi' T_{ij}^s = T_{ij}^s \dot{\hat{T}}_i^s - T_{ij}^s \hat{\omega}_{ij}^s \quad (4-1-29)$$

对于理想情况, 有 $\omega_{ij}^b = \omega_{ij}^s$ (静基座情况), 所以 $\dot{\hat{T}}_i^s = 0$, 则式 (4-1-29) 简化成:

$$\Phi' = -T_{ij}^s \cdot \hat{\omega}_{ij}^s \cdot T_{ij}^s = -T_{ij}^s T_{ij}^s \hat{\omega}_{ij}^s T_{ij}^s = -(I - \Phi')(T_{ij}^s)^{-1} \omega_{ij}^s T_{ij}^s \quad (4-1-30)$$

其中考虑到矩阵相似变换的表示法有:

$$(T_{ij}^s)^{-1} \hat{\omega}_{ij}^s T_{ij}^s \triangleq [\hat{\omega}_{ij}^s]^* \quad (4-1-31)$$

将式 (4-1-31) 代入式 (4-1-30), 可得:

$$\Phi' = (\Phi' - I)[\hat{\omega}_{ij}^s]^* \sim -[\hat{\omega}_{ij}^s]^* \quad (4-1-32)$$

根据矩阵相似变换定理, 从式 (4-1-32) 所表示的反对称相似变换可以得到与之相对应的矢量形式, 即

$$\dot{\Phi}' = T_{ij}^s [-\hat{\omega}_{ij}^s] = T_{ij}^s [-\omega_{iz}^s - \delta\omega_{iz}^s - \omega_{iz}^s + \Phi' \hat{\omega}_{iz}^s + \delta\hat{\omega}_{iz}^s]$$

考虑到 $\Phi^b = T_{ij}^b \Phi'$, 上式可以写成:

$$\dot{\Phi}^b = -\omega_{iz}^b - \delta\omega_{iz}^b - \omega_{iz}^b + \Phi^b \hat{\omega}_{iz}^b + \delta\hat{\omega}_{iz}^b \quad (4-1-33)$$

式中 $\omega_{ij}^s = (\omega_{ix}^s \ \omega_{iy}^s \ \omega_{iz}^s)^T$,

$\delta\omega_{ij}^s \triangleq (\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z)^T$,

ε_i ($i = x, y, z$)——陀螺仪漂移量;

$\omega_{iz}^s = 0$.

$$\Phi \omega_{i'}^b = \Phi \omega_{i'}^a = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{i_e} \cos \hat{\varphi} \\ \omega_{i_e} \sin \hat{\varphi} \end{bmatrix}$$

这里忽略了陀螺仪的标度因数误差及安装误差，将式 (4-1-33) 展开，有：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\omega_c^{i_x} - \varepsilon_x - \gamma \omega_{i_e} \cos \hat{\varphi} + \beta \omega_{i_e} \sin \hat{\varphi} \\ \dot{\beta} &= -\omega_c^{i_y} - \varepsilon_y - \alpha \omega_{i_e} \sin \hat{\varphi} - \omega_{i_e} \sin \hat{\varphi} \delta \hat{\varphi} \\ \dot{\gamma} &= -\omega_c^{i_z} - \varepsilon_z + \alpha \omega_{i_e} \cos \hat{\varphi} + \omega_{i_e} \cos \hat{\varphi} \delta \hat{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4-1-34)$$

式中 $\hat{\varphi}$ ——纬度测量值；

$\delta \hat{\varphi}$ ——纬度误差。

对于动基座时，由于 $\dot{T}_i^b = T_i^b \omega_a^{b*} = T_i^b \omega_a^{a*}$ ，所以式 (4-1-29) 变成：

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}^b &= T_i^b T_i^a \omega_a^{a*} T_i^b - T_i^b (\omega_a^{b*} + \delta \omega_a^{b*}) + \omega_a^{b*} - \Phi^b \omega_{i'}^b - \delta \omega_{i'}^b \\ &= T_i^b (-\omega_a^{a*} - \delta \omega_a^{a*} + \Phi^b \hat{\omega}_{i'}^a + \delta \hat{\omega}_{i'}^a) \\ &= (I - \Phi) (-\omega_a^{a*} - \delta \omega_a^{a*} + \Phi^b \hat{\omega}_{i'}^a + \delta \hat{\omega}_{i'}^a) \end{aligned} \quad (4-1-35)$$

上式忽略高阶小量，式 (4-1-35) 所表示的反对称相似变换可以得到与之相对应的矢量形式：

$$\dot{\Phi}^b = T_i^b (-\omega_a^{a*} - \delta \omega_a^{a*} + \Phi^b \hat{\omega}_{i'}^a + \delta \hat{\omega}_{i'}^a)$$

考虑到 $\Phi^b = T_i^b \Phi^a$ ，上式可以写成：

$$\dot{\Phi}^a = -\omega_a^{a*} - \delta \omega_a^{a*} + \Phi^a \hat{\omega}_{i'}^a + \delta \hat{\omega}_{i'}^a \quad (4-1-36)$$

将上式展开，得：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\omega_c^{i_x} - \varepsilon_x - r \left(\omega_{i_e} \cos \varphi + \frac{V_{ry}}{R} \right) + \beta \left(\omega_{i_e} \sin \hat{\varphi} + \frac{V_{rz}}{R} \operatorname{tg} \hat{\varphi} \right) - \frac{\delta V_{ry}}{R} \\ \dot{\beta} &= -\omega_c^{i_y} - \varepsilon_y - r \frac{V_{ry}}{R} - \alpha \left(\omega_{i_e} \sin \hat{\varphi} + \frac{V_{rz}}{R} \operatorname{tg} \hat{\varphi} \right) + \frac{\delta V_{rz}}{R} - \omega_{i_e} \sin \hat{\varphi} \delta \hat{\varphi} \\ \dot{\gamma} &= -\omega_c^{i_z} - \varepsilon_z + \beta \frac{V_{ry}}{R} + \alpha \left(\omega_{i_e} \cos \hat{\varphi} + \frac{V_{rz}}{R} \right) + \frac{\delta V_{rz}}{R} \operatorname{tg} \hat{\varphi} \\ &\quad + \frac{V_{rz}}{R} \sec^2 \hat{\varphi} d \hat{\varphi} + \omega_{i_e} \cos \hat{\varphi} \delta \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4-1-37)$$

纬度误差一般只有几角秒，这与 α 、 β 、 γ 相比很小，还有速度 V 引起的角速度，对于舰船来讲，则远远小于 ω_{i_e} ，因此式 (4-1-37) 可以进一步简化为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\omega_c^{i_x} - \varepsilon_x - \gamma \omega_{i_e} \cos \varphi + \beta \omega_{i_e} \sin \varphi - \frac{\delta V_{ry}}{R} \\ \dot{\beta} &= -\omega_c^{i_y} - \varepsilon_y - \alpha \omega_{i_e} \sin \varphi + \frac{\delta V_{rz}}{R} \\ \dot{\gamma} &= -\omega_c^{i_z} - \varepsilon_z + \alpha \omega_{i_e} \cos \varphi + \frac{\delta V_{rz}}{R} \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4-1-38)$$

根据上述不对准角的数学描述，可以构造出合适的 ω_c ，用以控制系统的不对准角度 α 、 β 、 γ 趋于零。

§ 4.2 捷联式惯性导航系统的粗对准技术

粗对准就是建立起一个近似的姿态矩阵的估计值 T_{ib}^i , 从而使系统可利用式(4-1-38)进行精对准。这里根据捷联系统的结构特点和舰船使用的特殊环境为例, 进一步讨论一个可行的、具有实用价值的对准方案。粗对准分为解析调平和方位装定两部分。通过这两个过程, 由舰船的瞬时航向和姿态角的估算值 \hat{H} 、 $\hat{\psi}$ 、 $\hat{\theta}$, 求出捷联矩阵的估计值 T_{ib}^i 。仿真分析表明, 一般海况下, 水平粗调精度在 2° 以内。

一、方位装定

系统在初始对准时, 应要求舰船在港内系泊或作匀速直线航行, 才能保证捷联系统在粗对准过程中不致产生过大的对准误差。

方位装定就是利用外测舰船首向的估计值 \hat{H} , 并送至捷联系统的导航计算机。若船上配套有辅助电航设备, 可以通过转换接口, 直接送至计算机, 若条件不具备, 可利用船上的磁罗盘的量测指示值, 人工装至计算机内, 即取:

$$\hat{H} = \tilde{H} \quad (4-2-1)$$

式中 \tilde{H} ——外测舰船首向。

方位装定误差就是外测船首向的量测误差与装定延时间隔时间内舰船首向变化量的和, 即

$$\delta\hat{H} = \delta\tilde{H} + \int_0^{\Delta t} \omega_d^{i*} dt \quad (4-2-2)$$

式中 $\delta\tilde{H}$ 为外测首向的量测误差; Δt 为装定延时时间, 当人工装定时, Δt 较大, 有几秒钟。

一般舰船在系泊或直线航行时, 方位变化不会太大, 即使在舰船系泊状态下, 其方位变化不超过 5° , 且量测误差至多也只有 5° , 所以式(4-2-2)中的 $\delta\hat{H}$ 假设为 $\delta\hat{H}_{\max} \leq 10^\circ$ 。

二、解析调平

解析调平就是利用加速度计对重力矢量的量测来估算舰船的水平姿态角, 由式(1-3-27)可以方便地求得加速度计量测到的载体坐标系相对惯性坐标系的比力 S_F 量测值的表达式:

$$\tilde{S}_F^b = \dot{V}_{ib}^b + (2\omega_{ie}^b + \omega_{ie}^b) \times V_{ib}^b - g^b + A_d^b + \nabla^b \quad (4-2-3)$$

式中 \dot{V}_{ib}^b ——载体相对地球运动加速度矢量在载体坐标系上投影;

ω_{ie}^b ——地球自转角速率在载体坐标系上投影;

ω_{ie}^b ——舰船绕地球表面运动所产生的相对地球的角速度在载体坐标系上投影;

g^b ——重力矢量在载体坐标系上的投影;

A_d^b ——由于惯性敏感器安装而不重合于舰船摇摆中心产生的有害加速度;

V^b ——加速度计量测误差矢量。

根据前述假设条件，舰船系泊或匀速直线航行时， $V_{\phi}^b = 0$ ，且忽略高阶小量，于是有：

$$\tilde{S}_P^b = -g^b + A_d^b = T_i^b(-g^i + A_d^i) \quad (4-2-4)$$

由于 $g^i = (0 \quad 0 \quad -g)^T$ ，将上述式子展开得：

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_P^{bx} &= g \cos \psi \sin \theta + A_d^{bx} \\ \tilde{S}_P^{by} &= -g \sin \psi + A_d^{by} \\ \tilde{S}_P^{bz} &= g \cos \psi \cos \theta + A_d^{bz} \end{aligned} \right\} \quad (4-2-5)$$

若再暂时略去 A_d^b 的影响，则可以从上述式子求得舰船纵横摇角的估算值 $\hat{\psi}$ 、 $\hat{\theta}$ 为：

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi} &= \arcsin(-\tilde{S}_P^{by}/g) \\ \hat{\theta} &= \arcsin[\sec \hat{\psi} \tilde{S}_P^{bz}/g] \end{aligned} \right\} \quad (4-2-6)$$

将所计算得到的 $\hat{\psi}$ 、 $\hat{\theta}$ 和方位装定 \hat{H} 的大小代入式 (1-5-3)，即可得到初始姿态矩阵 $T_i^b(0)$ ，即可以写成 T_i^b 。

粗调平的误差分析。先定义 ψ 、 θ 误差角：

$$\left. \begin{aligned} \delta\hat{\psi} &= \psi - \hat{\psi} \\ \delta\hat{\theta} &= \theta - \hat{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (4-2-7)$$

若考虑到 $\delta\hat{\psi}$ 、 $\delta\hat{\theta}$ 是由于忽略 A_d^b 所致，则式 (4-2-7) 可以改写成：

$$\left. \begin{aligned} \delta\hat{\psi} &= \arcsin[(-\tilde{S}_P^{by} + A_d^{by})/g] - \arcsin(-\tilde{S}_P^{by}/g) \\ \delta\hat{\theta} &= \arcsin[\sec \hat{\psi}(\tilde{S}_P^{bz} - A_d^{bz})/g] - \arcsin[\sec \hat{\psi} \tilde{S}_P^{bz}/g] \end{aligned} \right\} \quad (4-2-8)$$

在一般海况下，舰船吨位不大的船舶摇摆不很严重时，横摇角的幅值为 $\pm 45^\circ$ ，周期为 4~14s；而纵摇角的幅值为 $\pm 30^\circ$ ，周期为 4~8s，并令惯性敏感器组件距舰船稳定中心距 $r_{\phi\rho} = (2 \quad 2 \quad 2)^T$ ，距离单位为 m。根据上述给出数据取其平均周期可得其摇摆角速度为 $20^\circ/\text{s}$ ， $l_{\max} = 2\sqrt{3} \text{ m}$ ，由此可计算最大附加加速度值为：

$$(A_d^b)_{\max} \leq [(20^\circ/\text{s}) \div 57.3^\circ]^2 \cdot l_{\max} = 0.422 \text{ m/s}^2$$

于是有：

$$\left. \begin{aligned} (A_d^{bx}/g)^2 &\leq 1, (A_d^{bz}/g)^2 \leq 1 \\ (S_P^{bx}/g)^2 &\leq 1, (S_P^{bz}/g)^2 \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4-2-9)$$

对式 (4-2-8) 两边取正弦，并注意到：

$$\cos[\arcsin(\alpha)] = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

则有：

$$\left. \begin{aligned} \delta\hat{\psi} &\doteq -\frac{1}{g}(A_d^{by}) \\ \delta\hat{\theta} &\doteq -\frac{1}{g}(A_d^{bz}) \cdot \sec \hat{\psi} \doteq -\frac{1}{g}(A_d^{bz}) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-10)$$

所以

$$\max[\delta\hat{\psi} \quad \delta\hat{\theta}] = \frac{1}{g}(A_d^b)_{\max} \doteq 2.46^\circ$$

解析调平的最大误差为 2.46° 。当对准环境比较好时，这个误差会更小。此外该误差还与惯性传感器组件在舰船上的安装位置 r_{0i} 有关。显然距稳定中心越小，其误差越小。

三、一阶调平方案

在稳定平台式惯性导航系统中，稳定平台的粗调平常采用一阶对准方案，使稳定平台在较短时间内达到所要求的水平精度。这里以北向水平回路为例，其误差框图如图 4-2-1 所示。

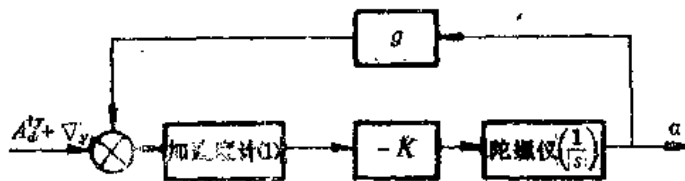


图4-2-1 一阶调平北向水平回路误差框图

将这种方法移植到捷联系统中，由式 (4-1-35)，考虑到因有较大的不对准角，对准修正角速度 ω_e 较大时，为简化问题的分析，忽略高阶小量于是有：

$$\dot{\Phi}^i = -T_i^i \omega_e^{i*} \approx -T_i^i \omega_e^{i*} \quad (4-2-11)$$

考虑到：

$$T_i^i = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \\ \cos \gamma \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

将式 (4-2-11) 写成矢量形式并展开，并注意粗调平时 $\omega_e^{i*} \approx 0$ 。

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha & \sin \alpha - \cos \alpha \sin \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_e^{i*} \\ \omega_e^{i*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_e^{i*} \\ \omega_e^{i*} \end{bmatrix} \quad (4-2-12)$$

可以看出，当有大的不对准角时，两个水平回路的交叉耦合影响增大。这个影响不但与水平姿态误差角 α 、 β 有关，而且还与方位不对准误差角 γ 有关。

采用一阶调平方案，并取：

$$\left. \begin{aligned} \omega_e^{i*} &= -K\alpha \\ \omega_e^{i*} &= -K\beta \end{aligned} \right\} \quad (4-2-13)$$

其误差框图如图 4-2-2 所示。

图中 K 为一阶调平的比例系数； T_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2$) 为 T_i^i 矩阵的第 i 行第 j 列元素；当分别取误差角 α 、 β 、 γ 的三组不同值进行仿真时，可取 $k=0.1$ ， $A_0=0$ ，三组数据的仿真图形分别如图 4-2-3、图 4-2-4 和图 4-2-5 所示。

由仿真分析可以看出，当方位误差 $\gamma_0=90^\circ$ ，水平姿态误差角 α 、 β 振荡不收敛，如图 4-2-3 所示；当 $\gamma_0=0$ ，水平姿态误差角 α 、 β 呈负指数收敛，如图 4-2-4 所示。

当 $\gamma_0=60^\circ$ 时，水平姿态误差角 α 、 β 收敛较慢，且有振荡，如图 4-2-5 所示。

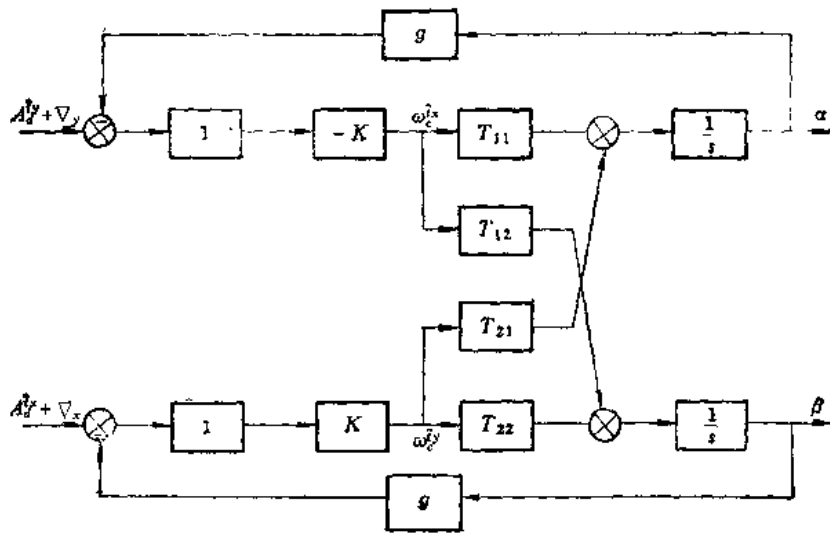


图4-2-2 一阶调平两条水平回路误差框图

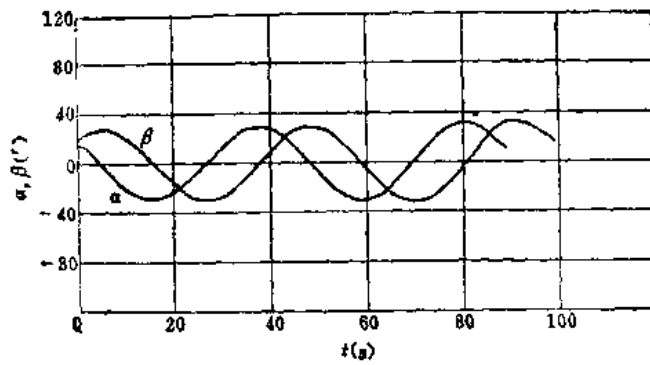


图4-2-3 水平误差角仿真曲线之一

$$\gamma_0 = 90^\circ; \alpha_0 = 20'; \beta_0 = 20'.$$

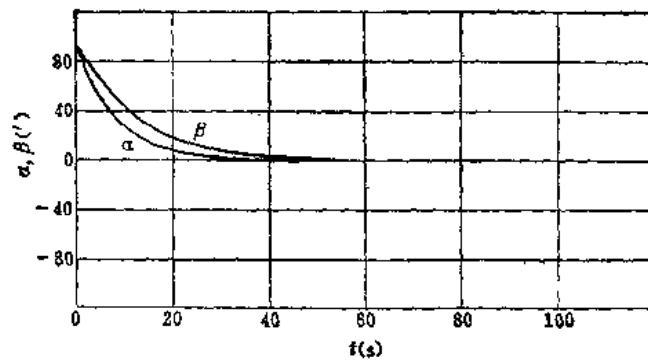


图4-2-4 水平误差角仿真曲线之二

$$\gamma_0 = 0; \alpha_0 = 100'; \beta_0 = 100'.$$

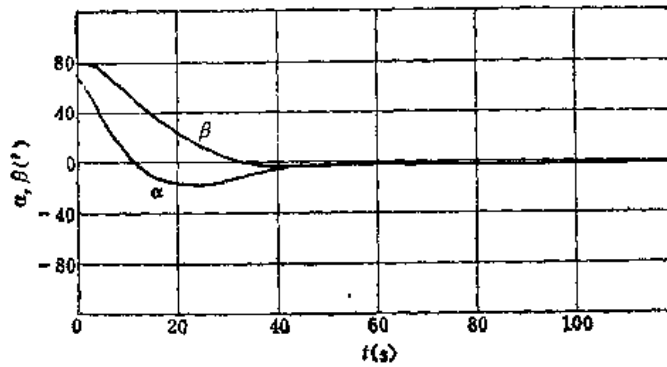


图4-2-5 水平误差角仿真曲线之三

$$\gamma_0 = 60^\circ; \alpha_0 = 70'; \beta_0 = 80'$$

当方位装定 $\gamma_0 \leq 10^\circ$ ，分别对 $\gamma_0 = 0^\circ, 5.7^\circ, 11.4^\circ, 22.8^\circ$ 进行仿真，取 $K = 0.2$ ， $\alpha_0 = 30'$ 仿真曲线如图 4-2-6 所示。

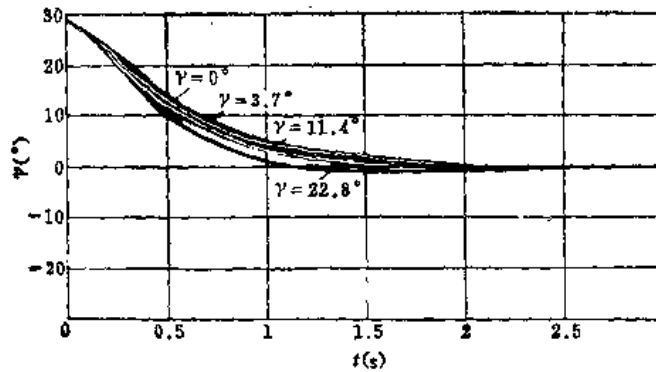


图4-2-6 水平误差角仿真曲线之四

$$K_y = 0.2; \alpha = 30'$$

很明显，方位误差角在 10° 以内时，水平粗调平的过渡过程差别不大，所以说一阶调平方案对于捷联式惯性导航系统同样适用，只是由于两条回路的耦合影响，过渡过程时间会稍长一些。

当考虑到舰船摇摆产生的有害加速度的影响，从误差框图中可以分析得出，若 $A_d = 0$ ，系数 K 取得越大， α 、 β 收敛的越快；然而 K 选取过大，系统对 A_d 的干扰抑制作用就有所降低，因此实际系统必须折衷选取系数 K 的大小。

§ 4.3 捷联式惯性导航系统的精对准技术

通过粗对准，可以得到一水平精度为不超过 0.5° 、方位精度为不大于 10° 的数学解算平台，显然该指标是满足不了舰船导航的要求的，所以说应在粗对准的基础上，采用下面讨论的精对准方案，使系统在较短的时间内，实现更高精度的对准和调平。整个过程可分成精调平与方位估算两部分。

一、精调平

在粗调平的基础上，由于精校准时间较短，一般不考虑纬度误差的变化，忽略各通道之间的交叉耦合项的影响。这样简化之后，就可以把多回路变成单回路来分析，而两个水平回路是完全一样的，只是北向水平回路多一项 $\gamma\omega_{ie}\cos\varphi$ ，这是因为一般情况下 γ 较大，在水平精校准时可当成误差源来处理。在上述的简化条件下，形成的北向单通道水平回路，其方块图如图 4-3-1 所示。

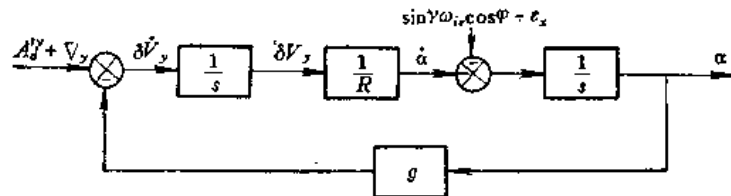


图 4-3-1 北向单通道水平回路方块图

从图 4-3-1 中可以看出，具有舒拉周期振荡特征，其振荡周期为 84.4min。舒拉周期的物理意义可以这样来理解：舰船以加速度 a 沿大圆弧航行，引起地垂线变化的角加速度 $\ddot{\alpha}_b = a/R$ 。若使摆绕支点以相同大小的角加速度运动，则有一惯性力矩 mal 作用在摆锤上，该摆锤在此力矩作用下会产生角加速度 $\ddot{\alpha}_a = mal/J$ 。如果控制有关参数得当，恰好使摆的角加速度 $\ddot{\alpha}_a$ 等于地垂线改变的角加速度 $\ddot{\alpha}_b$ ，即 $\ddot{\alpha}_a = \ddot{\alpha}_b$ 。这样摆便跟踪地垂线运动，摆不再偏离当地垂线，即 $\alpha = 0$ 。当系统具有舒拉振荡周期，则不受加速度干扰。

从图 4-3-1 中可以看出，该系统有两个积分环节。当它们的输入信号变为零时，其输出信号可以不为零，即 $\delta \dot{V}_y = 0$ ， $\delta V_y \neq 0$ ， $\ddot{\alpha} = 0$ ， $\alpha \neq 0$ ，从而该系统能够处在平衡状态。

从图 4-3-1 还可以看出，由于该系统是一个二阶无阻尼系统，所以一种水平精校准的方案是在无阻尼水平回路中引入阻尼，阻尼的信息取自系统内速度信息，经过阻尼网络后再加到系统中去。引入阻尼后，单通道水平精校准误差方块图如图 4-3-2 所示。

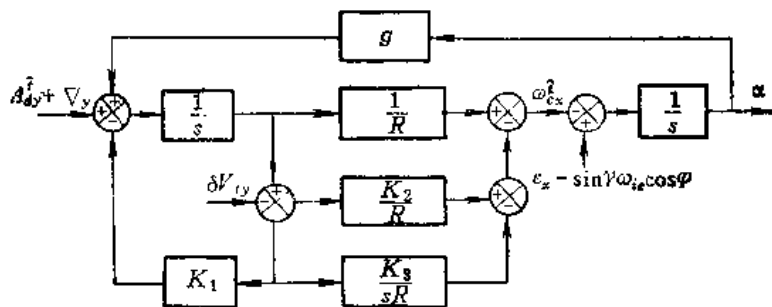


图 4-3-2 北向水平回路误差方块图

图中 $\delta \dot{V}_y$ 为外测速度北向分量误差。外测速度的引入，可以使系统在匀速直线航行中实现对准。

从误差方块图中可以看出，当 K_1 、 K_2 、 K_3 为零时，系统是一个二阶无阻尼系统， α 、 β 角以舒拉周期绕零点作不衰减振荡，且不受加速度的影响，其特征方程式为，

$$\Delta(s) = s^2 + \omega_0^2 \quad (4-3-1)$$

选用上述三阶调平编排方案的控制原理是：设置 K_1 负反馈环节，它的输入信号采用 δV_x ，而输出信号 $K_1 \delta V_x$ 去控制加速度计的输出端，它对积分环节构成负反馈，使原来的积分环节变成惯性环节 $1/(s + K_1)$ ，此时系统的特征方程式为：

$$\Delta(s) = s^2 + K_1 s + \omega_0^2 \quad (4-3-2)$$

从特征方程式看出，增加 K_1 后，系统增加了阻尼项 $K_1 s$ ，为此系统得到了阻尼，但系统的固有振荡周期未变，仍为 84.4min；当误差角 α 、 β 较大的时候，解析平台精校准到水平状态的时间较长，不能满足初始校准的快速性要求。

为使系统的振荡周期缩短，则必须加大振荡频率，这样在系统中应再增加一反馈并联环节 K_2/R ，此时系统的特征方程式为：

$$\Delta(s) = s^2 + K_1 s + (K_2 + 1)\omega_0^2 \quad (4-3-3)$$

从特征方程式可以看出，增加了 K_2 后，使系统固有振荡周期缩短 $\sqrt{1+K_2}$ 倍。它仍然是一个典型的二阶系统，同样可以做到符合我们要求的动态特性，此时的系统称为二阶阻尼系统；只有 K_1 时系统称为一阶阻尼系统。通过改变 K_1 去控制振荡周期的长短。

由于陀螺常值漂移以及加速度计零位误差等因素将引起的水平稳态误差必须予以消除，所以应在陀螺仪力矩器输入端增加一积分环节，即储能环节。当 $\delta v_x = 0$ ，产生一个信号抵消误差源 $\sin \gamma \omega_{ie} \cos \varphi + e_x$ ，以便消除由此引起的常值误差。增加了 K_3/sR 积分环节后，水平精校回路如图 4-3-2 所示。此时系统变为三阶阻尼系统，该系统特征方程式为：

$$\Delta(s) = s^3 + K_1 s^2 + (1 + K_2)\omega_0^2 s + K_3 \omega_0^2 \quad (4-3-4)$$

若所有干扰量均为常值时，则根据终值定理得知其稳态误差为零。

1. 定时快速调平

我们知道，采用上述系统调平方案，适当选取参数，就可以在一定时间里，使得数学解析平台的误差角 α 、 β 稳定在零位附近。系统在欠阻尼状态下，即等效阻尼比 ζ 在 0~1 之间，不对准角的修正动态过程是从初值开始并迅速向零靠近，一次至多次穿过零点，并逐渐稳定在零点附近。当系统调平动态过程第一次到达零点时，取此时刻的姿态角为对准姿态角，从而得到进一步准确的捷联矩阵。

当系统到达定时时刻调平的“过零时刻”，系统立即取该时刻的姿态矩阵为初值，以便进行下一步的精调平和方位精对准。

接着修正系统的设计方法，取

$$K_1 = 0.03451 / s$$

$$K_2 = 5160$$

$$K_3 = 3.6941 / s$$

$$\alpha(0) = 30'$$

则在对准的第 77 s 时，解析平台的水平姿态误差角即达到 90' 以内，以这一时刻的姿态矩阵为初值进行精调平。

2. 变参数调平

为了改善系统的性能，系数 K_1 、 K_2 、 K_3 也不一定是常值，可以选取适当的函数

形式进行计算。

若取第一组参数：

$$K_{11}=0.0542, K_{21}=1270.8, K_{s1}=15.3$$

由计算机仿真后得的水平对准误差曲线如图 4-3-3 所示。

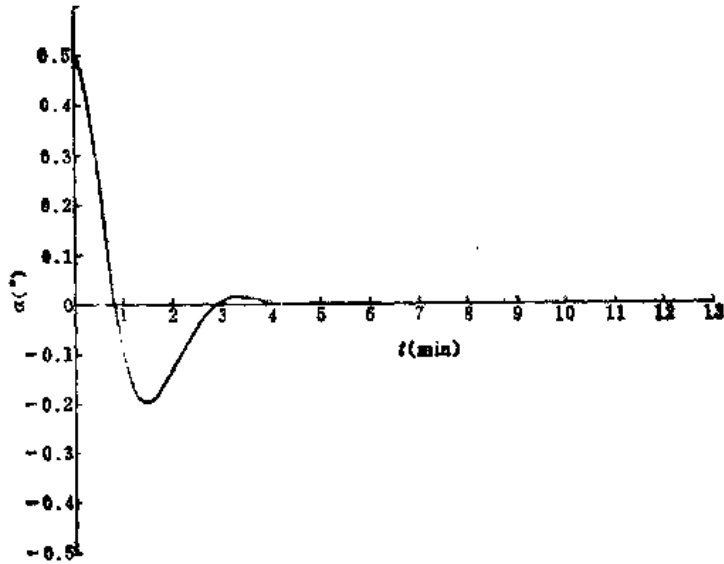


图4-3-3 水平对准误差仿真曲线之一

若取第二组参数：

$$K_{21}=0.271, K_{22}=187.5, K_{23}=0.748$$

由计算机仿真后得到的水平对准误差曲线如图 4-3-4 所示。

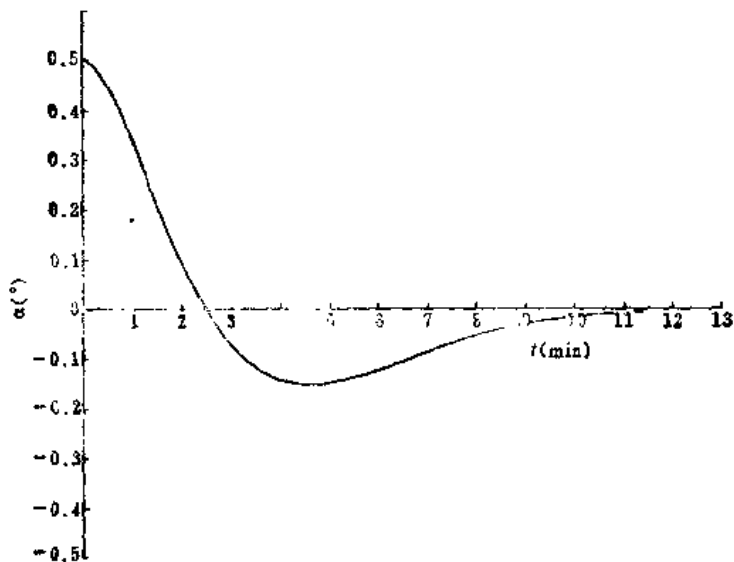


图4-3-4 水平对准误差仿真曲线之二

显然前述两种情况都不十分理想，前者瞬时误差大，后者过渡过程时间较长，假如对 K_1 、 K_2 、 K_s 参数选取用分段变增益方法经计算机仿真后得到水平对准误差，其曲线如图 4-3-5 所示。即在 0~180 s 内采用 K_{11} 、 K_{21} 、 K_{s1} 的数值，180 s 以后采用 K_{12} 、 K_{22} 、 K_{s2} 的数值。从图 4-3-3、图 4-3-4，图 4-3-5 比较可以看出，采用分段变增益方

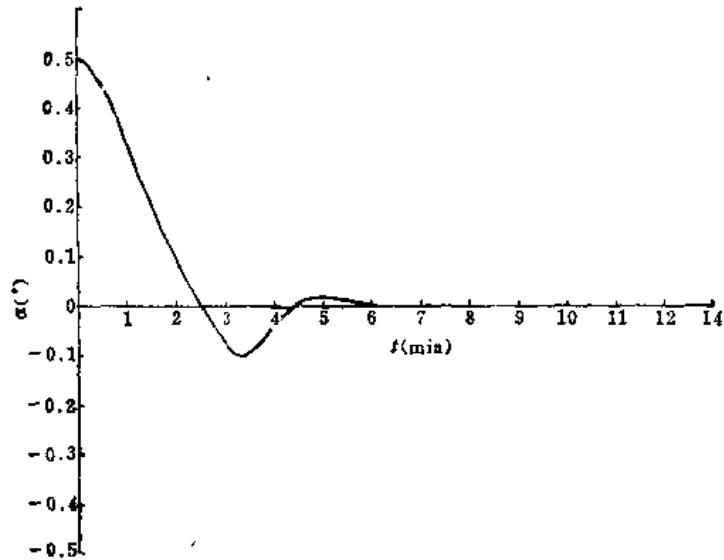


图4-3-5 水平对准误差仿真曲线之三

法，其对准时间大大缩短，且有较好的动态性能，其稳态误差为 ∇_v/g 。若 ∇_v 取 $2 \times 10^{-5} g$ ，则对准精度小于 $6.5'$ ，对准时间为 6 min 。

若为获得最优对准性能；则可以采取对以上叙述的三个参数 K_1 、 K_2 、 K_3 进行最优估算，采用瞬变增益系统的方法进行对准修正。

3. 精调平的参数设计

当选定三阶调平方案之后，如何确定并优化设计参数 K_1 、 K_2 、 K_3 ，需作进一步讨论。

令方程 (4-3-4) 的根为：

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\sigma \\ s_{2,3} &= -\sigma \pm j\omega_d \end{aligned} \right\} \quad (4-3-5)$$

则得方程为：

$$(s + \sigma)(s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega_d^2) = 0 \quad (4-3-6)$$

如果令：

$$\left. \begin{aligned} \omega_d^2 &= \sigma^2 + \omega_0^2 \\ \sigma &= \zeta\omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-3-7)$$

式中 ω_0 ——有阻尼时的自然频率；

ω_0 ——无阻尼时的振荡角频率；

σ ——时间常数；

ζ ——阻尼系数。

那么有：

$$\omega_0 = \sigma \sqrt{(1 - \zeta^2)/\zeta^2} \quad (4-3-8)$$

$$s_{2,3} = -\sigma \pm j\sigma \sqrt{(1 - \zeta^2)/\zeta^2} \quad (4-3-9)$$

这样，式 (4-3-6) 变为：

$$s^3 + 3\sigma s^2 + \left(2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\sigma^2 s + \frac{\sigma^3}{\zeta^2} = 0 \quad (4-3-10)$$

同样令方程 (4-3-4) 为零后和式 (4-3-10) 相比较有:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= 3\sigma \\ K_2 &= \left(2 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \frac{\sigma^2}{\omega_s^2} - 1 \\ K_3 &= \sigma^3 / \zeta^2 \omega_s^3 \end{aligned} \right\} \quad (4-3-11)$$

式 (4-3-11) 就是水平精校准回路参数选取的公式, 只要阻尼系数 ζ 、时间常数 σ 确定以后, 即可计算出 K_1 、 K_2 、 K_3 的大小。

所以如何确定 ζ 、 σ 值, 那是设计参数 K_1 、 K_2 、 K_3 的关键所在。对于式 (4-3-4) 所表示的方程式是一个线性非齐次三阶微分方程, 它的解有两部分, 一是特解, 即是稳态解; 另一是齐次解。由线性非齐次三阶微分方程式可以得到 α_0 对 α 的时间函数为:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = e^{-\sigma t} \left[-\frac{2\zeta^2}{1-\zeta^2} + \frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2} \cos \left(\sigma \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{\zeta^2}} t \right) + \sqrt{\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}} \sin \left(\sigma \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{\zeta^2}} t \right) \right] \quad (4-3-12)$$

根据式 (4-3-12) 可以做出瞬态标准曲线。这里以 σt 为横坐标, α/α_0 为纵坐标, ζ 为参变量, 从而可以得出三阶系统瞬态标准曲线图如图 4-3-6 所示。

有了瞬态标准曲线, 则可以求得 σ 值, 再根据对时间常数、阻尼系数 ζ 的具体要求, 利用式 (4-3-12) 求出 K_1 、 K_2 、 K_3 等参数值。

例如: 取 $\alpha(0) = \alpha'$, 扣除加速度计零偏产生的稳态误差, 要求稳态误差 $12'$, 则 $\alpha/\alpha_0 = 0.1$, 取 $\zeta = 0.7$, 由图 4-3-6 查得 $\sigma t = 4.5$, 取 $t = 7 \text{ min}$, 这样可求得:

$$\sigma = 4.5 / 7 \times 60 = 1.071 \times 10^{-3}$$

$$K_1 = 0.032143 \text{ 1/s}$$

$$K_2 = 300.7$$

$$K_3 = 1.6321 \text{ 1/s}$$

综上所述, 当取一阶调平时间 $t_R = 55 \text{ s}$, 定时刻调平时间 $t_{F1} = 77 \text{ s}$, 精调平时间 $t_{F2} = 420 \text{ s}$, 从而实现数学解析平台调平时间为:

$$t_i = t_R + t_{F1} + t_{F2} = 55 + 77 + 420 = 562 (\text{s})$$

二、方位精对准

1. 罗经效应法

常用的捷联式惯性导航系统的初始方位精对准方法是引入一个“数学解析平台”之

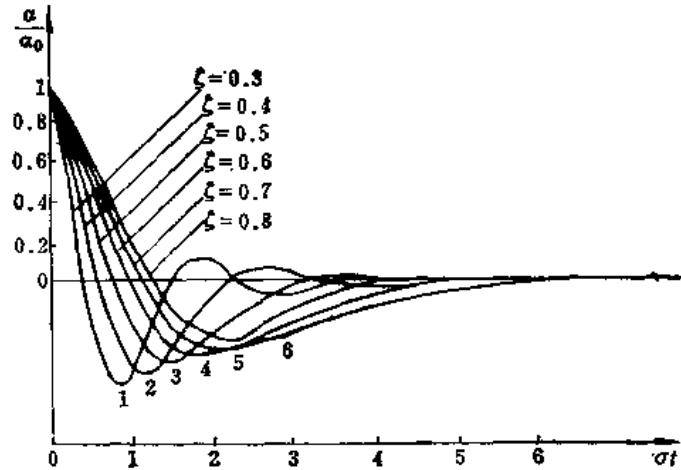


图4-3-6 三阶系统瞬态标准曲线图

后，利用传统的闭环陀螺罗经效应原理来进行。由前所述，在北向水平精调平回路中，有一项等效陀螺仪漂移项 $\omega_{ie} \cos \varphi \sin \gamma$ ，如图 4-3-1 所示。对应东向水平精校平回路则没有这一项，它说明北向精对准回路与方位轴有密切关系，它们之间的交叉耦合影响比较大。正是因为它们之间有较强的交叉耦合项 $\omega_{ie} \cos \varphi \sin \gamma$ 才有可能使方位精对准得以实现。这里我们将 $\omega_{ie} \cos \varphi \sin \gamma$ 的影响称为罗经效应。我们可以从控制的角度去设计罗经方位对准回路使 γ 值逐渐减小，直到最后达到允许范围。图 4-3-7 表示北向对准和方位对准二者的耦合关系。

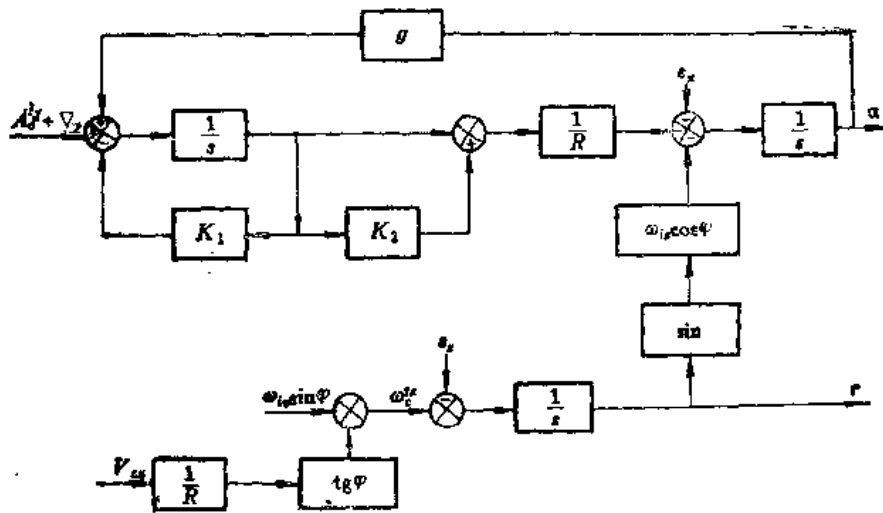


图 4-3-7 北向水平精调平回路与方位误差角的关系

当计算地理坐标系 (\hat{i} 系) 与地理坐标系 (t 系) 存在着方位误差角 γ 时，载体上的陀螺仪将感受地球自转角速度在 \hat{i} 系上的分量 $\omega_{ie} \cos \varphi \sin \gamma$ 。此分量相当于陀螺仪的漂移，这样使得 \hat{i} 系和 t 系有一倾斜角 α ，相当于从加速度计引入一个 ag 的信息，经积分后引起速度误差 δV_y 。通过测量 δV_y ，可以测量到罗经效应的大小。

由于通过角 α 才能在 δV_y 中反映罗经效应项，因此在水平回路中不应再设置消除由 α 和 $\omega_{ie} \cos \varphi \sin \gamma$ 引起角 α 稳态误差的积分环节 K_3/sR ，而是用 δV_y 为控制信号，设计一控制环节去控制角 γ ，使得角 γ 减小到所允许的范围。欲控制方位误差角 γ ，必须以一定的规律去控制 ω_{ie}^t 。根据这样一个物理过程去设计一个控制环节 $K(s)$ ，使它的输入信号为 δV_y ，输出信号为 $K(s)\delta V_y$ ，以去适应代替 ω_{ie}^t 。从角 γ 开始，经过罗经效应影响的各环节，最后到 δV_y 输出，再经过方位控制环节 $K(s)$ ，直到输出角 γ 为止，这样一条回路称为罗经回路。利用罗经回路原理，达到方位精对准的目的。方位精对准的原理图，如图 4-3-8 所示。

由于方位精对准是在水平精调平之后，所以认为 α 为小角。由于方位上也是在粗对准之后，近似可认为 $\sin \gamma \approx \gamma$ ，故图 4-3-8 可以简化为图 4-3-9。

从图 4-3-9 不难看出，该系统的特征方程式为：

$$\Delta(s) = s^3 + K_1 s^2 + (1 + K_2) \omega_{ie}^2 s + \omega_{ie} \cos \varphi K(s) g \quad (4-3-13)$$

由于 $\omega_{ie} \cos \varphi$ 是随纬度 φ 而变化的，为使系统方程式变为常系数方程，可将 $K(s)$ 设计成：

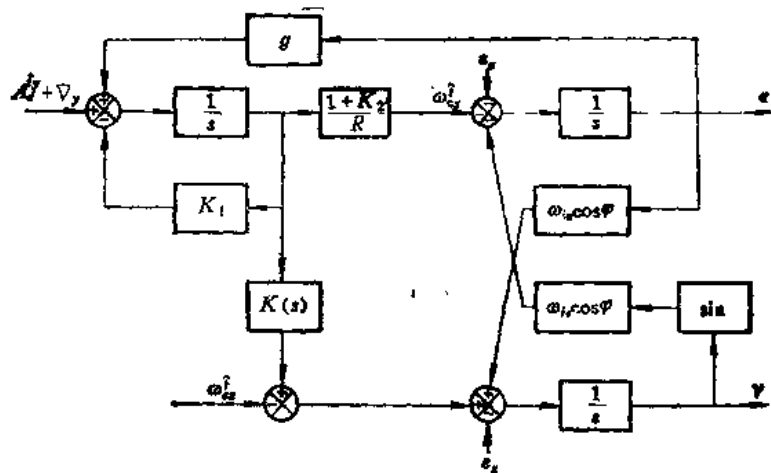


图4-3-8 方位精对准原理图

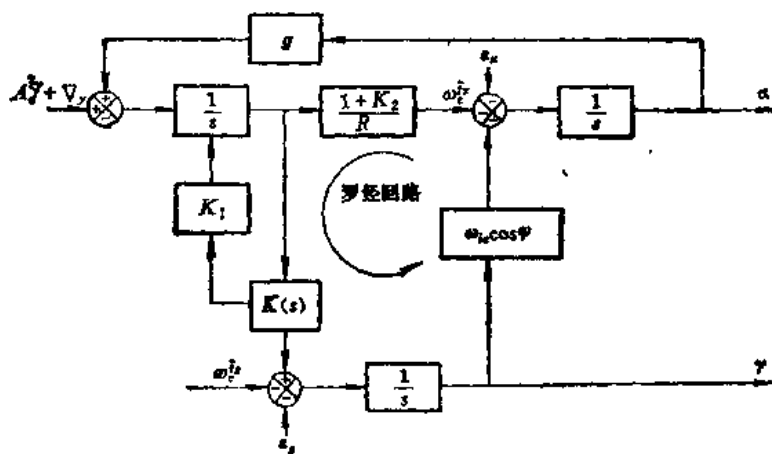


图4-3-9 简化后的方位精对准原理图

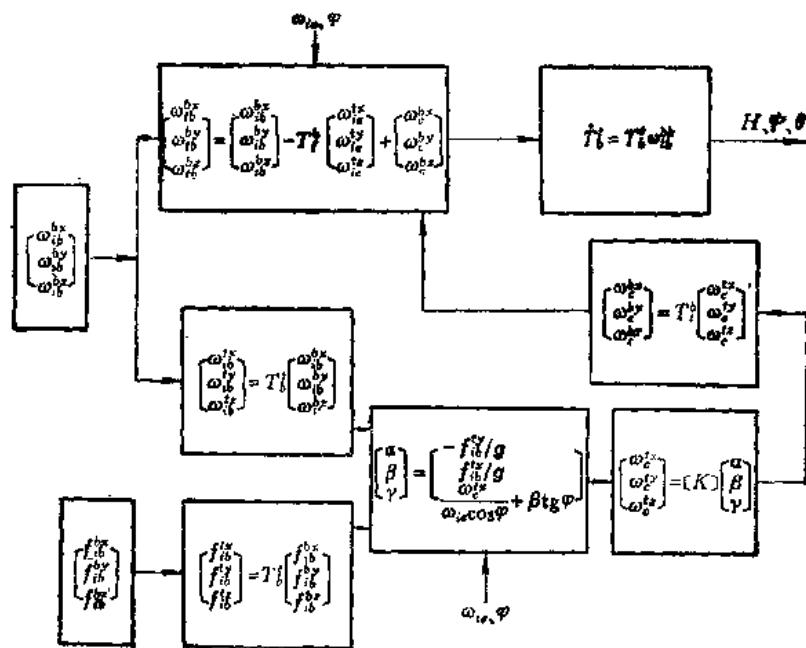


图4-3-10 初始对准计算流程图

$$K(s) = K_2 / [R\omega_{ie} \cos \varphi (s + K_3)] \quad (4-3-14)$$

其中 $1/(s + K_3)$ 是增加方位回路的滤波作用的环节, 可改善系统的性能。

将式 (4-3-14) 代入式 (4-3-13), 则有,

$$\Delta(s) = s^4 + (1 + K_3)s^3 + [K_1 K_3 + (1 + K_2)\omega_{ie}^2]s^2 + (1 + K_2)K_3\omega_{ie}^2 \cdot s + K_2\omega_{ie}^2 = 0 \quad (4-3-15)$$

从式 (4-3-15) 可看出, 系统是四阶的。将 $K(s)$ 设计成式 (4-3-14) 的形式, 构成的罗经回路称为四阶陀螺罗经回路。该方位精对准方称为四阶罗经效应原理。

捷联式惯性导航原理初始对准流程图如图 4-3-10 所示。其中 ω_e^{1*} 、 ω_e^{2*} 、 ω_e^{3*} 分别为沿东、北、天轴向的初始对准控制角速度; 矩阵 $[K]$ 为控制增益, 并不一定为常数。

图中 f_{11}^{1*} 、 f_{11}^{2*} 、 f_{11}^{3*} 表示加速度计测量到的比力 S_e^{1*} 在载体坐标系上的投影分量。

2. 方位误差估算法

在方位精对准中除了前面介绍的罗经效应法外, 下面再介绍一种实用的方位误差估算法。由于方位精对准是在精调平后期进行, 北向误差 α 、东向误差角 β 很小并趋于零, $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 也随着系统逐渐稳定并趋于零。自主式方位对准是指在导航计算机内实现数学解析平台的北向基准, 物理上实现当地指北的关键在于如前所述的引入两个不共线的地球物理矢量 g 和 ω_{ie} 。反映在捷联系统结构中, 就是构成具有地面指北功能的两个不可缺少的反馈控制, 其一是罗经原理的自寻北反馈控制回路, 称为地球回路; 其二是基于舒拉调谐原理的指示当地地垂线回路, 称为舒拉回路。

在粗对准中, 由于方位装定产生的方位误差 γ 为 $\delta \hat{H}$, 一般此值较大而不能视为小角度。这样当精调平 α 、 β 为小角度时, 表示不对准误差角矩阵 $T_{\hat{i}}$ 如图 4-1-1 所示的坐标变换关系, 可得:

$$T_{\hat{i}} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & -\beta \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & \alpha \\ \beta \cos \gamma + \alpha \sin \gamma & \beta \sin \gamma - \alpha \cos \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (4-3-16)$$

于是, 式 (4-1-37) 中表示北向水平回路的系统误差方程 $\dot{\alpha}$ 的表达式可写成:

$$\dot{\alpha} = -\omega_e^{1*} - e_x - \sin \gamma \left(\omega_{ie} \cos \hat{\varphi} + \frac{V_{rx}}{R} \right) + \beta \left(\omega_{ie} \sin \hat{\varphi} + \frac{V_{rx}}{R} \operatorname{tg} \hat{\varphi} \right) - \frac{\delta V_{rx}}{R} \quad (4-3-17)$$

考虑到 $\gamma \gg \beta$ 、 $\sin \gamma \omega_{ie} \cos \varphi \gg \frac{\delta V_{rx}}{R}$ 、忽略两条水平回路的耦合, 且为中等纬度时, 式

(4-3-17) 可以近似改写成:

$$\dot{\alpha} = -\omega_e^{1*} - e_x - \sin \gamma \omega_{ie} \cos \hat{\varphi} \quad (4-3-18)$$

由于系统稳定后, $\dot{\alpha} \approx \dot{\beta} \approx 0$, 可得:

$$\sin \gamma \approx -(\dot{e}_x + \omega_e^{1*}) / \omega_{ie} \cos \hat{\varphi} \quad (4-3-19)$$

其中 ω_e^{1*} 是计算机计算得出的, 所以式 (4-3-19) 可以作为方位误差的估算的表达式:

$$\hat{\varphi} = \arcsin [-(\dot{e}_x + \omega_e^{1*}) / \omega_{ie} \cos \varphi] \quad (4-3-20)$$

系统在水平精调平的同时, 就可以进行方位误差的估算, 最后得到方位的精对准值为:

$$H = \hat{H} + \hat{\varphi} \quad (4-3-21)$$

将得到的 H 代入精调平后的方向余弦矩阵,即得到精确的方向余弦矩阵,从而系统完成了初始对准任务。在系统进入精调平时,就可以同时开始方位误差的估算,系统数字仿真结果如图4-3-11所示。

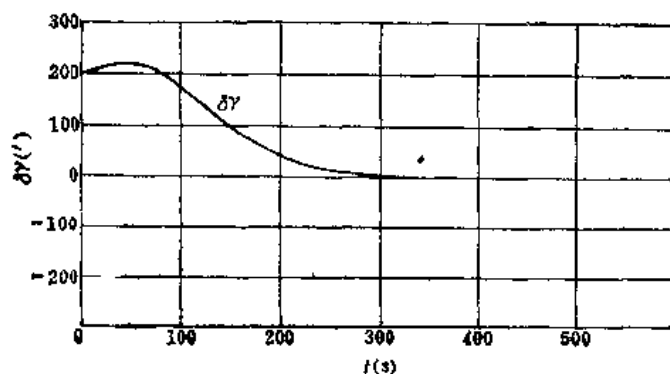


图4-3-11 方位误差仿真曲线

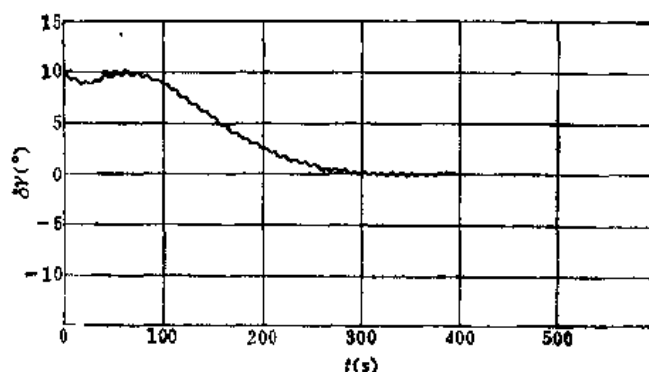


图4-3-12 有加速度干扰时的方位误差仿真曲线

当方位精对准进行到300 s时,方位误差的估算值 $\delta\gamma$ 下降到 $10'$;当进行到360 s时, $\delta\gamma$ 下降到 $4'$ 。这当然是指理想的情况,实际系统中舰船的有害加速度、陀螺漂移等误差源的存在,将对这一估计产生误差。

设 $(A_d^i)_{\max}=0.422\text{ m/s}^2$ 时,系统计算机仿真如图4-3-12所示。

很明显,舰船摇摆形成的船体有害加速度会使方位误差估算产生振荡误差,幅值可达到 $20'$ 。显然,它会严重地影响方位误差的估计值。为此应对得到的估计值进行必要的处理。其方法一般有二:一是在精调平的系统参数设计中,要进一步降低系统的带宽,这样就可以使误差限制在一个很小的范围内,但是系统的带宽的降低,其快速性又受到影响;其二是构置一个低通滤波器,对估算出的 $\hat{\gamma}$ 进行滤波。

可以采用“固定校正系数”的低通滤波算法进行实时递推:

$$\hat{\gamma}(K) = \hat{\gamma}(t-1) + \frac{1}{K_1} [\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t-1)] \quad (4-3-22)$$

式中 $\hat{\gamma}$ 为方位误差的估计值; $\tilde{\gamma}$ 为量测值;校正系数 K_1 为常数。经过滤波, $(A_d^i)_{\max}$ 的影响下降到 $1.8'$ 。若想进一步减小 $(A_d^i)_{\max}$ 的影响,可以适当增大 K_1 。滤波后的数字仿真曲线如图4-3-13所示。

由式(4-3-18)与式(4-3-19)有:

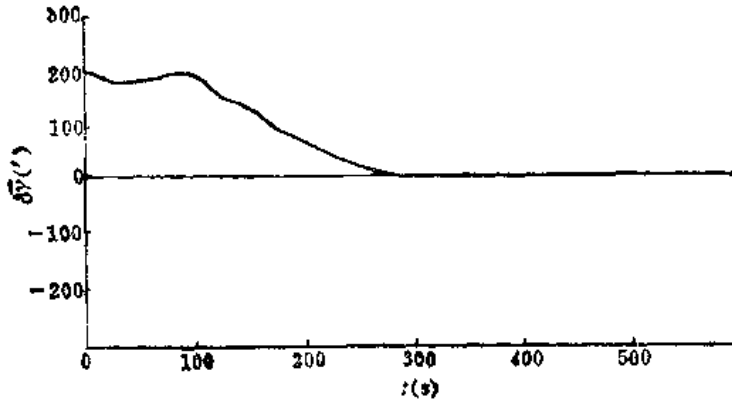


图4-3-13 经滤波后方位误差仿真曲线

$$\left. \begin{aligned} \hat{\gamma} &= \arcsin[-\omega_e^{ix}/\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}] \\ \gamma &= \arcsin\left[-\frac{\omega_e^{ix} + \varepsilon_x}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}}\right] = \arcsin\left[-\frac{\omega_e^{ix}}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} - \frac{\varepsilon_x}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}}\right] \end{aligned} \right\}$$

我们定义：

$$\delta\hat{\gamma} \triangleq \gamma - \hat{\gamma} \tag{4-3-23}$$

则有：

$$\sin\delta\gamma = \sin(\gamma - \hat{\gamma}) = \sin\gamma\cos\hat{\varphi} - \cos\gamma\sin\hat{\varphi}$$

考虑到 $\delta\gamma$ 是小角度，可忽略高阶小量，所以有：

$$\begin{aligned} \delta\gamma &\doteq \frac{\omega_e^{ix} + \varepsilon_x}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} \frac{\sqrt{(\omega_{ie}\cos\hat{\varphi})^2 - (\omega_e^{ix})^2}}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} - \frac{\omega_e^{ix}}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} \frac{\sqrt{(\omega_{ie}\cos\hat{\varphi})^2 - (\omega_e^{ix} + \varepsilon_x)^2}}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} \\ &\doteq \frac{\varepsilon_x}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} \cdot \frac{\sqrt{(\omega_{ie}\cos\hat{\varphi})^2 - (\omega_e^{ix})^2}}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} \doteq \frac{\varepsilon_x}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} \end{aligned} \tag{4-3-24}$$

其中：

$$\frac{\sqrt{(\omega_{ie}\cos\hat{\varphi})^2 - (\omega_e^{ix})^2}}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} \doteq \frac{\sqrt{(\omega_{ie}\cos\hat{\varphi})^2 - (\omega_e^{ix} + \varepsilon_x)^2}}{\omega_{ie}\cos\hat{\varphi}} \doteq \sqrt{1 - (\omega_e^{ix}/\omega_{ie}\cos\hat{\varphi})^2} \doteq 1$$

假设 $\varepsilon_x = 0.03^\circ/h$ ， $\hat{\varphi} = 30^\circ$ ，其数字仿真曲线如图 4-3-14 所示。系统稳定时产生大约 $8'$ 的稳态误差，这是由陀螺漂移所引起的原理误差。

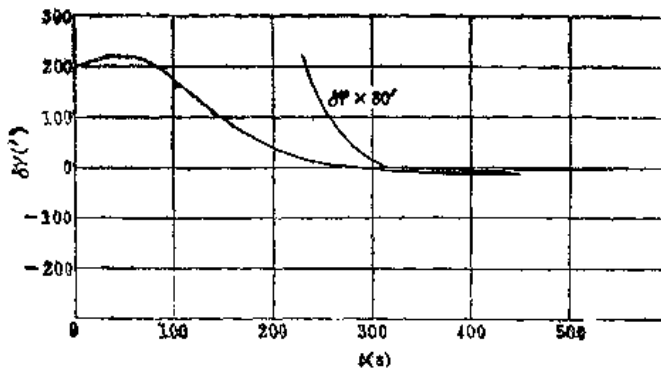


图4-3-14 陀螺漂移引起的方位误差的仿真曲线

三、舰船航行状态下的初始对准

对于船用捷联系统由于船舶航行时间较长，能否实现航行状态下实现系统的初始对准是一个很值得探讨的实用问题。假定舰船以匀速直线航行，这时捷联系统的惯性速度中不仅含有数学解析平台“倾斜”引起的重力分量的积分值，而且还有舰船相对地球运动的速度。在这种环境下若仍然以系统中的惯性速度作为捷联系统的对准信息，则势必引起误差。为此可以引入外测基准速度进行补偿。其系统原理方块图如图 4-3-15 所示。

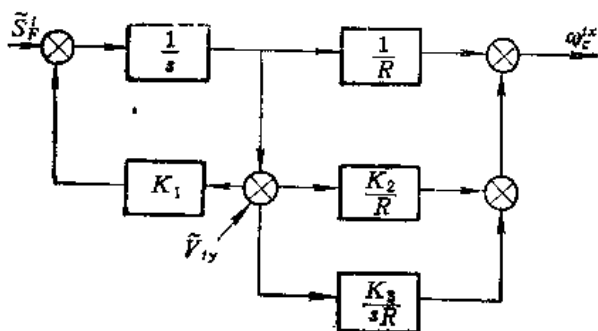


图4-3-15 捷联系统在航行状态下的初始对准

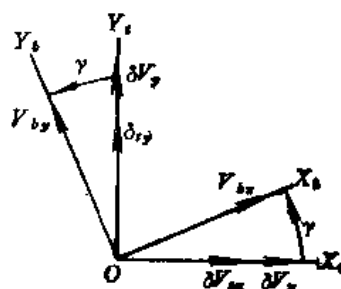


图4-3-16 速度误差的坐标变换图

从原理上讲，这种方案与前面介绍的初始对准方案是一致的。系统的误差源多了一项 δV ，速度误差的坐标变换如图 4-3-16 所示。从坐标图中可以方便地得到下式。

$$\begin{cases} \delta V_x = \delta V_{ex} - \sin\gamma V_{by} \\ \delta V_y = \delta V_{ey} + \sin\gamma V_{bx} \end{cases} \quad (4-3-25)$$

粗对准后，外测速度的引入，可以使系统在匀速直线航行中实现方位对准。其方位对准误差取决于外测速度误差的大小。

航行中初始方位对准过程由于外测速度误差的引入会对方位精对准精度有很大影响，北向水平回路里系统的误差方程 (4-3-18) 可以改写成为：

$$\dot{\alpha} = -\omega_c^{ix} - \varepsilon_x - \sin\gamma \omega_{ie} \cos\varphi - \frac{\delta V_y}{R} \quad (4-3-26)$$

粗对准后， γ 比较小， γ 在 10° 以内，设船速小于 30kn。这样，外测速度误差 δV_y 可以等效陀螺源移 $\varepsilon'_x = \frac{\sin\gamma \cdot V_x}{R}$ 。将 $\gamma = 10^\circ$ 、 $V_x = 30\text{kn}$ 、 $R = 6370\text{km}$ 等数值代入 ε'_x 表达式，可得：

$$\varepsilon'_x = 0.868^\circ / \text{h}$$

由前述分析可以得知，方位对准误差式可由式 (4-3-24) 变成：

$$\delta\gamma = \frac{1}{\omega_{ie} \cos\varphi} \left(\varepsilon_x + \frac{\delta V_y}{R} \right) \quad (4-3-27)$$

综上所述，当舰船以匀速直线航行时，同样可以实现捷联系统的初始对准，但这时必须引入外测基准速度，而外测速度的大小和量测误差将影响捷联系统的方位对准误差。

§ 4.4 捷联式惯性导航系统初始对准的参数优化设计

采用传统方法设计的精调平方案，虽然满足了一定的技术要求，但所设计的系统其性能指标并不是最优的。这里利用优化技术来进一步设计精调平参数最优系统。

一、基本原理

最优化就是要从所有可行的方案中选择一种最合理的方案，以期达到最优目标。控制系统的最优化是指系统在有约束或无约束的条件下，使其所追求的目标函数达到最大或最小。这类问题的研究一般分为：函数最优化问题，即最优控制方法；参数最优化问题，即最优设计方法。

在捷联式惯性导航系统机械编排确定的情况下，采用参数最优化是合适的。其基本方法如下：

$$\dot{X} = F(X, K, t) \quad (4-4-1)$$

式中 X —— n 维状态向量；
 F —— n 维系统结构向量；
 K —— m 维被设计的参数向量；
 t ——时间向量。

在无约束条件下或有约束条件下，找出一组 m 维参数 K^* ，以便使目标函数 $Q(K)$ 趋于最大或最小。

二、目标函数的建立

取描述系统性能的误差准则作为寻优的目标函数，常用的误差准则有以下几个：

1. 平方积分误差准则

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (4-4-2)$$

以这个准则达到最小值所设计的系统具有下面几个特点：在大的初始误差时有迅速减小误差的倾向；过渡过程时间很短；但会出现明显的振荡，系统的稳定性较差。

2. 时间乘平方误差积分准则

$$I_2 = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt \quad (4-4-3)$$

其特点：着重权衡过渡过程中后期出现的误差，而较少考虑大的初始误差。

3. 时间乘绝对误差积分准则

$$I_3 = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (4-4-4)$$

具有较小的超调，着重权衡过渡过程后期出现的误差，并具有良好的选择性，便于寻优。

4. 时间乘绝对误差及绝对误差变化率积分准则

$$I_4 = \int_0^{\infty} t [|e(t)| + |\dot{e}(t)|] dt \quad (4-4-5)$$

该准则的特点：不仅具有权衡过渡过程后期出现的误差，而且还使系统具有良好的动态特性，同时也具有良好的选择性。

考虑到捷联系统精调平过渡过程应超调小，后期误差也应迅速减小，并考虑到方位误差估算应期望系统尽快稳定，所以取式(4-4-5)作为寻优的目标函数，取捷联系统中数学解析平台的水平误差角 α 、 β 为误差函数。

三、参数优化

取参数优化目标函数为：

$$I_a = \int_0^{600} t (|\alpha(t)| + |\dot{\alpha}(t)|) dt \quad (4-4-6)$$

考虑到实际舰船使用环境中舰船有害加速度的影响，以图4-3-2所示的北向水平回路误差方块图为系统的机械编排，则有：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{1}{R}(1+K_2)x_1 - x_2 \\ \dot{x}_1 &= A'_d + ag - K_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{R} K_3 x_1 \end{aligned} \right\} \quad (4-4-7)$$

式中 $A'_d \triangleq \lambda A'_d$ ，

λ ——干扰信号的加权系数。

用试验法选取适当的 λ 值以满足式(4-4-6)为最小的系统参数。当舰船有害加速度对系统的影响小于或等于设计要求时，例如 α 小于 $0.5'$ ，取 $\alpha(0)=8'$

$$K_1(0) = 0.0324 \quad 1/s$$

$$K_2(0) = 300.7$$

$$K_3(0) = 1.632 \quad 1/s$$

经应用式(4-4-6)寻优后得：

$$K_1^* = 0.0462 \quad 1/s$$

$$K_2^* = 868.2$$

$$K_3^* = 5.722 \quad 1/s$$

数字仿真曲线如图4-4-1所示。

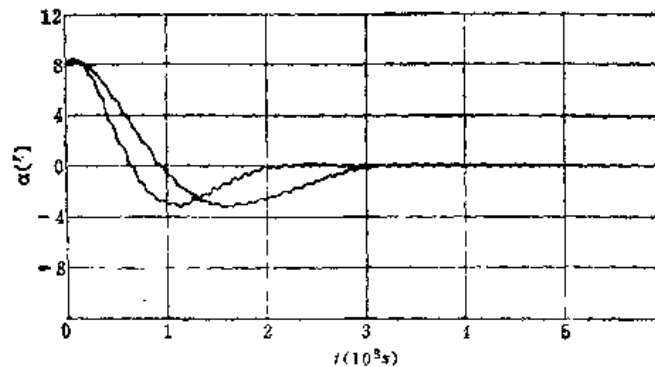


图4-4-1 优化参数的仿真曲线

由图中可以明显地看出，采用优化的参数，可使精调平从原设计的 7min 缩短到 4min。方位误差的估算过程大约从需要的 3.5min 就下降到 5'。当然由于存在舰船有害加速度干扰影响的分量，其方位误差的估算值会增加到 15'~25'，考虑滤波延迟，一般取方位估算时间为 5min。

这样，捷联式惯性导航系统大约经过 t_T^* 时间就可以实现解析平台的初始对准。即

$$t_T^* = t_R + t_{F1} + t_{FA}^* = 55 + 77 + 300 = 432 \text{ s} \approx 7 \text{ min}$$

式中 t_R ——一阶调平时间；

t_{F1} ——定时刻调平时间；

t_{FA}^* ——精调平及方位误差估算时间。

上面讨论的“方位误差估算法”实现方位对准与传统的罗经效应法相比，就其原理来说是一致的，但在对准时间上，由于“方位误差估算法”可以与精调平过程同时进行，而罗经效应法则要分步进行，所以前者的对准时间可大大缩短。

第五章 捷联式惯性导航系统的冗余技术

捷联系统是将测量载体的旋转角速度和比力的传感器——陀螺仪和加速度计的输入轴固联于载体上。陀螺仪和加速度计分别给出载体瞬时旋转角速度 ω_b 和 S_b 在载体轴上的投影。捷联系统的优点在于可以用简单的方式，即增加惯性敏感器的个数来实现冗余技术，从而达到提高系统可靠性的目的；而稳定平台式系统欲实现冗余技术一般要使用两套以上的系统，所以说捷联系统从原理上具有便于实现可靠性的优点。在稳定平台式惯性导航系统中，一般是把三个单自由度陀螺仪和三个单轴加速度计的输入轴沿三个相互垂直的三个参考轴配置，此时若一个惯性敏感器发生故障则系统就不能正常工作了；而捷联式惯性导航系统为了提高其可靠性，可采用两种方法，其一是提高单个惯性敏感器本身的可靠性，以降低故障发生率；其二是在惯性敏感器级上构成冗余系统，以增加惯性敏感器的故障容许次数。本章主要研究的是惯性敏感器级冗余系统的最佳几何配置和怎样借助于计算机软件技术实现惯性敏感器的故障自动检测和识别，以达到提高系统可靠性的要求。

§ 5.1 冗余技术的模型化

一般来说，增加惯性敏感器的数量，系统可靠性便可以提高。通常的作法是将系统的关键惯性敏感器的数量扩大两倍和三倍，以满足系统的可靠性和安全性的要求。这种作法要求在载体的每一个控制轴上设置几个陀螺仪和加速度计。这种惯性敏感器冗余技术的常规编排方式叫作“平行轴冗余”。每个轴都各自按要求扩大倍数。

另一种编排的特点是使测量轴在空间作适当分布，以便在减少惯性敏感器所需总数的情况下达到总的可靠性和安全性的要求。这就是我们所称的“斜置轴冗余”，如图 5-1-1 所示。

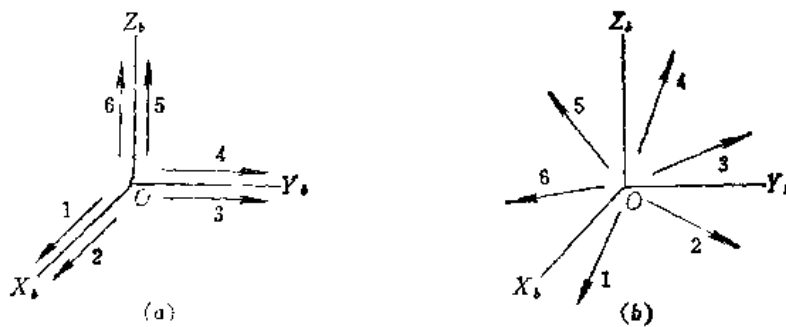


图5-1-1 冗余系统的原理

(a) 平行冗余. (b) 斜置冗余。

采用平行冗余基准系统，必须把沿载体三个轴配置的测量轴加倍，也就是说，要能检测出任何一轴上的故障（仅仅是检测出），这在可靠性级别上称之为故障保险。即必

须有六个敏感轴，即要有六个速率陀螺输入轴和六个加速度计输入轴。

而采用斜置轴冗余基准系统，只需要增加一个辅助惯性敏感器，并使整个系统的全部敏感轴作均匀分布，就可以得到相同的结果。

若有六个敏感轴、斜置冗余就可以检测和识别出载体两个轴上的故障并检测出第三根轴上的故障。这是因为故障检测的作用在于发现系统某处是否有故障，而故障识别则是指辨识出发生故障的仪表而加以隔离。因此说在敏感轴数量相同的情况下，斜置冗余比平行冗余的效果更好。

一、组成冗余模型的若干类别

构成冗余系统的惯性敏感器的个数只要四个以上即可。一般说来，敏感器个数增加，系统的可靠性即可提高。下而仅就分别采用四、五、六个惯性敏感器系统，对其组成模型的设定、可靠性分析、惯性敏感器误差对三个垂直轴的影响进行分析，并确定惯性敏感器几何位置的最佳配置。这里以单轴速率积分陀螺为例，将四、五、六个惯性敏感器作互不垂直的安装，只容许任意一个、二个或三个敏感器出故障。可是如采垂直安装，当惯性敏感器个数为四、五个时，则有一根轴只能安装一个惯性敏感器，故当这根轴上的一个惯性敏感器出了故障，则就不能作为惯性组件使用了。而当惯性敏感器的个数为六个时，可考虑在各垂直轴安装一至四个的组合方法，都不能容许任意三个惯性敏感器出故障。对于一、一、四个的组合来说，只容许在一个轴上有三个惯性敏感器出故障。至于互不垂直安装的模型，可根据惯性敏感器个数（四、五、六）分别称为4S系统、5S系统、6S系统。作为4S系统可考虑如图5-1-2、图5-1-3、图5-1-4所示的配置模型；而对于5S、6S系统可考虑如图5-1-5、图5-1-6所示的配置模型。根据前述情况，对于这些配置模型在各自系统中（4S、5S、6S）分别容许任意一个、二个、三个惯性敏感器出故障，所以在用同样数量的敏感器时，比任何垂直安装时的可靠度都高。在这些图中，角 α 作为惯性敏感器的安装角，其最佳配置值将在下一节叙述。而各惯性敏感器输入轴方向的单位矢量 i_j ($j = 1 \sim 6$) 中的 j 是表示惯性敏感器的排列顺序，以后称惯性敏感器 j 时，则是指“惯性敏感器的编号”。各系统的 i_j 和 i_x, i_y, i_z 间的关系如下：

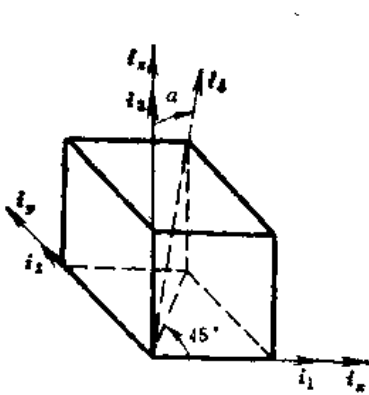


图5-1-2 互不垂直四惯性敏感器系统之一

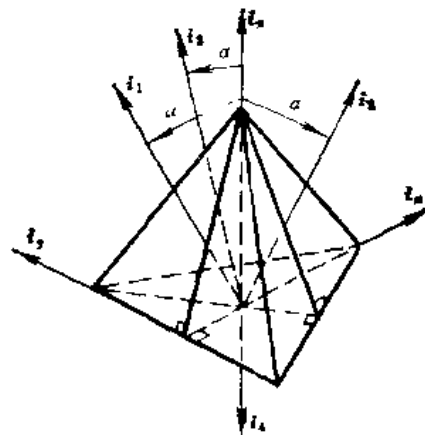


图5-1-3 互不垂直四惯性敏感器系统之二

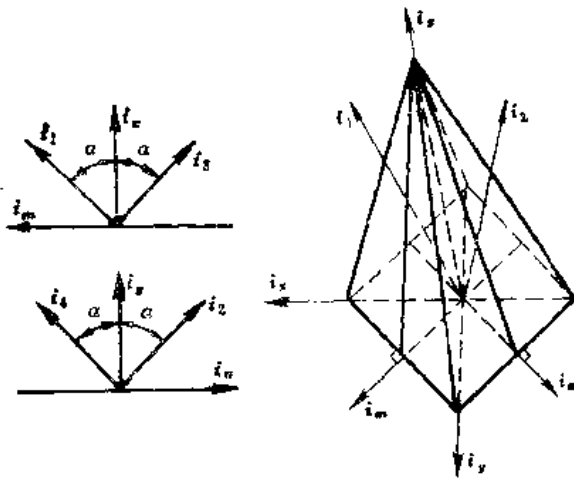


图5-1-4 互不垂直四惯性传感器系统之三

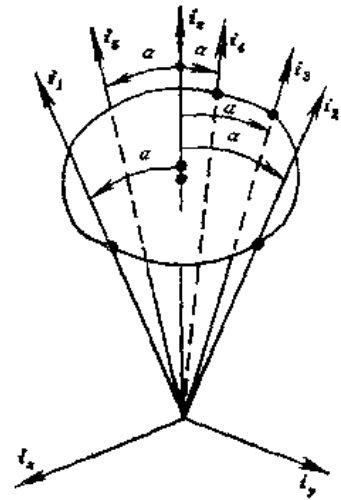


图5-1-5 互不垂直五惯性传感器系统

图 5-1-2 中, i_1, i_2, i_3 和 i_x, i_y, i_z 一致, 而 i_4 由式 (5-1-1) 决定, 即:

$$\left. \begin{aligned} i_4 i_x &= \cos \alpha \\ i_4 i_z &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-1-1)$$

图 5-1-3 中, i_1 和 i_x, i_y, i_z 之间的关系由式 (5-1-2) 决定:

$$\left. \begin{aligned} i_1 i_x &= i_2 \cdot i_x = i_3 \cdot i_x = \cos \alpha \\ i_4 &= -i_1 \\ i_1 i_z &= -2i_2 i_z = -2i_3 i_z = -\sin \alpha \\ i_2 i_y &= -i_3 i_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-1-2)$$

图 5-1-4 中 i_j 和 i_x, i_y, i_z 间的关系由式 (5-1-3) 决定:

$$\left. \begin{aligned} i_j i_x &= \cos \alpha \quad (j = 1 \sim 4) \\ i_1 i_x &= i_1 i_y = i_2 i_y = i_4 i_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \\ i_2 i_x &= i_3 i_x = i_3 i_y = i_4 i_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-1-3)$$

在图 5-1-5 中, 各惯性传感器输入轴是沿着绕 Z 轴的圆锥母线, 惯性传感器输入轴的相互关系如图 5-1-4 所示。

$$\left. \begin{aligned} i_1 \cdot i_2 &= i_2 \cdot i_3 = i_3 \cdot i_4 = i_4 i_5 = i_5 i_6 \\ i_j i_x &= \cos \alpha \quad j = 1 \sim 5 \\ i_1 i_z &= \sin \alpha \\ i_2 i_x &= i_5 i_x = \sin \alpha \cos \beta \\ i_2 i_y &= -i_5 i_y = \sin \alpha \sin \beta \\ i_3 i_x &= i_6 i_x = -\sin \alpha \cos \frac{\beta}{2} \\ i_3 i_y &= -i_6 i_y = \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} \\ \beta &= 72^\circ \end{aligned} \right\} \quad (5-1-4)$$

在图 5-1-6 的 6S 系统中，惯性传感器输入轴的相互关系如下：

$$\left. \begin{aligned} i_1 i_x = i_2 i_x = i_3 i_x = i_4 i_x = i_5 i_y = i_6 i_y = \cos \alpha \\ i_1 i_x = i_3 i_y = i_5 i_x = -i_2 i_x = -i_4 i_y = -i_6 i_x = \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-1-5)$$

在惯性组件中，若将惯性传感器安装得使其输入轴和上述各 $i_j (j = 1 \sim 6)$ 相一致，则可以构成图 5-1-2 至图 5-1-6 所示的由一个参数 α 来确定的配置模型。当陀螺仪与加速度计等惯性传感器在航行过程中一旦发生故障而不能修理时，则称这些惯性传感器构成的惯性组件为非修理系统。对于不可修理系统或产品来说，它的寿命是指从开始工作的时刻起到失效前的时间。有时产品的寿命又称为“失效时间”。

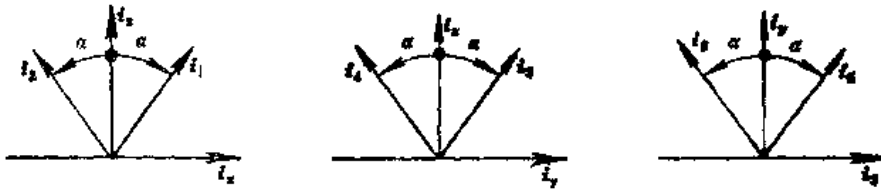


图5-1-6 互不垂直六传感器系统

二、可靠度函数及其求法

系统与产品的可靠度是指它在一定的时间内完成预定功能的概率，或者说系统与产品的可靠度是在 $[0, t)$ 内系统正常工作的概率，因此可用系统与产品的寿命或系统与产品的某一特征值来描述可靠度。显然，系统与产品的寿命是一个非负的随机变量 $x \geq 0$ ，不可修理系统随时间 t 进程的工作状态如图 5-1-7 所示。

对于任意一时刻 $t > 0$ ，当产品与系统的可靠度函数 $R(t)$ 是它正常工作的时间随机变量 x 大于 t 的概率时，则有：

$$R(t) = P(x > t), \quad t > 0 \quad (5-1-6)$$

我们知道，连续型随机变量 x 的分布规律可以用其分布函数 $F(t)$ 或分布密度 $f(t)$ 来表示，因此可以用分布函数 $F(t)$ 或分布密度来表示可靠度 $R(t)$ 。即

$$R(t) = P(x > t) = 1 - P(x \leq t) = 1 - F(x) \quad (5-1-7)$$

或有

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t) dt, \quad t \geq 0$$

由上面分析可知，可靠性 $R(t)$ 是时间 t 的函数，它描述系统与产品在 $[0, t)$ 内不失效的概率； $F(t)$ 是表示产品在 $[0, t)$ 内失效的概率，故又称不可靠度，或称失效函数；称 $f(t)$ 为失效密度，显然有：

$$\left. \begin{aligned} F(t) + R(t) = 1, \quad R(t) = 1 - F(t) \\ R'(t) = -f(t) = -F'(t) \end{aligned} \right\} \quad (5-1-8)$$

由概率论的有关知识可知，可靠度具有下列性质：

- (1) $R(0) = 1$ ，表示系统在开始时刻处于良好状态；

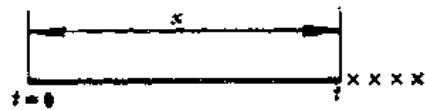


图5-1-7 不可修理系统工作状态图

- (2) $R(t)$ 是时间 t 的单调减函数, $R(t)$ 随时间 t 的增大而减小;
- (3) $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$, 即表明当时间 t 充分大时, 可靠性趋于零;
- (4) $0 \leq R(t) \leq 1$, 说明无论任何时刻, 其可靠度的值都介于零和 1 之间。

对于一般惯性敏感器可以认为发生故障的次数为随机变量, 而且单位时间内发生故障的次数很小, 同时在一段时间间隔 t 内发生的故障次数在一个有限的平均值附近摆动, 此时在时间间隔 t 中恰好发生 x 次故障的概率可以近似用泊松分布来表示为:

$$P(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad (5-1-9)$$

式中 λ ——单位时间内发生故障的次数, 即失效率;

λt ——时间 t 内发生的平均故障次数。

若设 $x = 0$, 则有:

$$P(0) = e^{-\lambda t} \quad (5-1-10)$$

它表示在时间 t 内一次故障也没有发生的概率, 通常它称为该系统的可靠性函数, 即可靠度。

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (5-1-11)$$

将此系统或产品的平均故障间隔时间, 记为 MTBF (Mean Time Between Failures), 即有:

$$\text{MTBF} = \int_0^{\infty} R(t) dt = -\frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = \frac{1}{\lambda} \quad (5-1-12)$$

对于不可修复系统或产品常常用平均寿命表示, 记为 MTTF (Mean Time To Failure), 用它来取代 MTBF。平均寿命有时又称平均无故障时间 t_0 。由于惯性敏感器存在着早期、偶然和磨损三个故障时期, 一般在偶然失效期使用时, 其失效率 $\lambda = 1/t_0$ 是一定的。此时刻惯性敏感器单个可靠度 R_0 为:

$$R_0 = e^{-\lambda t} = e^{-t/t_0} \leq 1 \quad (5-1-13)$$

当在同一可靠度 R_0 的 n 个惯性敏感器中的稳定平台系统中, 假定三个单自由度陀螺仪发生的故障事件是独立的, 系统的其他部件也都是理想的, 则系统的可靠度 $R(t)$ 将由三个器件可靠度的乘积来确定。

$$R(t) = e^{-3\lambda t} \quad (5-1-14)$$

由此可以算出, 欲想在一年内使系统的可靠性达到 0.95, 则每一个器件的平均寿命 (MTTF) 应为 59 年, 所以在稳定平台系统中, 为提高系统可靠性, 一般要三套稳定平台系统同时工作, 通过对系统的输出进行加权平均, 按表决方式实现故障的检测与隔离。这样做会使系统的体积、重量和成本都很大。而对于捷联系统, 则可以针对可靠性较差的器件实现前述的冗余配置, 可以用较低的代价能明显地提高整个系统的可靠性。

当在同一可靠度 R_0 的 n 个惯性敏感器中, 容许 m 个 ($n > m$) 发生故障时, 系统的可靠度 R_0 为:

$$R_0 = R_0^n + C_n^{n-1} R_0^{n-1} (1 - R_0) + \dots + C_n^m R_0^m (1 - R_0)^{n-m} \quad (5-1-15)$$

欲使由单自由度陀螺仪组成的冗余系统正常工作, 至少需要三个陀螺仪, 此时系统的可靠性为:

$$R'_s = R_s^n + C_s^{n-1} R_s^{n-1} (1 - R_s) + \dots + C_s^2 R_s^2 (1 - R_s)^{n-2} \quad (5-1-16)$$

显然，三个陀螺仪的测量轴不共面，也不能有两个陀螺仪的测量轴共线，这就要求测量矩阵 H 中，任意三行构成的 3×3 阶矩阵是非奇异的。

欲使由二自由度陀螺仪构成的冗余系统正常工作，至少需要两个仪表，这样该系统可靠性为：

$$R_s = R_s^2 + C_s^{2-1} R_s^{2-1} (1 - R_s) + \dots + C_s^2 R_s^2 (1 - R_s)^{2-2} \quad (5-1-17)$$

测量矩阵 H 中，由任意两个仪表构成的 4×3 阶矩阵，至少有一个 3×3 阶矩阵是非奇异的，由此可以看出假定每个单独的单自由度陀螺的可靠度 R_s 与每个二自由度陀螺的可靠度完全一样，那么二自由度陀螺构成的冗余系统的可靠性要高。

按式 (5-1-16) 与式 (5-1-17) 的分析与计算冗余系统的各种配置方案的可靠性，下面以非正交配置的四个单轴惯性敏感器为例加以说明。欲使该系统正常工作，一是四个敏感器都要正常工作；二是任意三个敏感器的组合正常工作。全部四个敏感器均正常工作的概率（独立事件的交集）为：

$$R'_s = R_s^4 = R_s^{4 \times 1} \quad (5-1-18)$$

而任意三个惯性敏感器的组合可正常工作的概率为：

$$R'_s = 4R_s^3 (1 - R_s) \quad (5-1-19)$$

这样由四个陀螺仪构成的冗余系统的可靠性为式 (5-1-18) 与式 (5-1-19) 之和确定（互斥事件的并集）的，其概率为：

$$R_s = 4R_s^3 - 3R_s^4 = 4e^{-3\lambda t} - 3e^{-4\lambda t} \quad (5-1-20)$$

若单个陀螺仪的平均故障间隔时间（MTBF）是 $1/\lambda$ ，则三个沿参考正交坐标系轴向安装的系统平均故障间隔时间（MTBF）是 $1/3\lambda$ 。四个陀螺仪构成冗余系统平均故障间隔时间（MTBF）可按式计算：

$$(MTBF)_4 = \int_0^\infty R_s(t) dt = \frac{4}{3\lambda} - \frac{3}{4\lambda} = \frac{7}{12\lambda} \quad (5-1-21)$$

这表示 4 S 系统的平均故障间隔时间是无冗余系统的 1.75 倍。用类似的方法可以计算出单轴和双轴仪表构成的各种冗余系统的可靠性，其结果分别列在表 5-1-1 和表 5-1-2

表 5-1-1 单轴惯性敏感器冗余系统可靠性

配置方案	可靠性 R_s	MTBF	比值
三轴正交配置	$e^{-3\lambda t}$	$\frac{1}{3\lambda}$	1
4 S 系统	$4e^{-3\lambda t} - 3e^{-4\lambda t}$	$\frac{7}{12\lambda}$	1.75
5 S 系统	$6e^{-5\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 10e^{-3\lambda t}$	$\frac{47}{60\lambda}$	2.35
6 S 系统	$-10e^{-6\lambda t} + 36e^{-5\lambda t} - 45e^{-4\lambda t} + 20e^{-3\lambda t}$	$\frac{57}{60\lambda}$	2.86

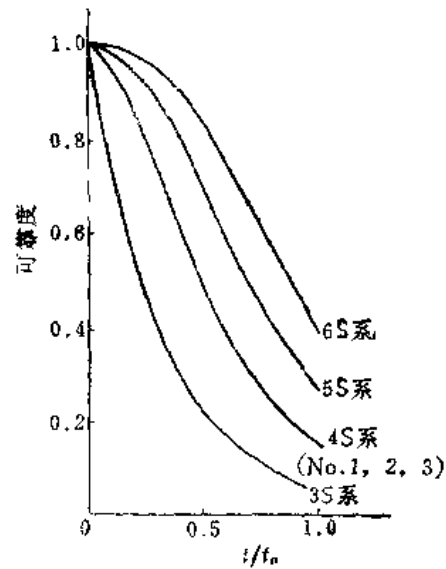


图 5-1-8 各种冗余系统的可靠度

中, 各种冗余系统的可靠性与归一化时间的关系如图 5-1-8 所示。可见, 随惯性传感器个数的增加, 其可靠性是增加的。

表 5-1-2 双轴惯性传感器冗余系统可靠性

配置方案	可 靠 性 R_s	MTBF	比值
两陀螺系统	$e^{-2\lambda t}$	$\frac{1}{2\lambda}$	1
3S 系统	$3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$	$\frac{5}{6\lambda}$	1.66
4S 系统	$6e^{-2\lambda t} - 8e^{-3\lambda t} + 3e^{-4\lambda t}$	$\frac{13}{12\lambda}$	2.16
5S 系统	$10e^{-2\lambda t} - 20e^{-3\lambda t} + 15e^{-4\lambda t} - 4e^{-5\lambda t}$	$\frac{77}{60\lambda}$	2.57
6S 系统	$15e^{-2\lambda t} - 40e^{-3\lambda t} + 45e^{-4\lambda t} - 24e^{-5\lambda t} + 5e^{-6\lambda t}$	$\frac{87}{60\lambda}$	2.90

§ 5.2 惯性传感器冗余系统的最佳配置

一、变换矩阵

冗余系统的各惯性传感器的输出 ω_i ($i = 1 \sim 6$) 并不是彼此独立的, 因此有必要变换成垂直的三个轴方向的分量 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 后再用于导航计算。该变换是利用伪逆矩阵 M 进行的, 而 M 是通过下式求得的。

$$\left. \begin{aligned} M &= (H^T H)^{-1} H^T \\ [i_1 i_2 \cdots i_V]^T &= H [i_x i_y i_z]^T \end{aligned} \right\} \quad (5-2-1)$$

式中 H ——把垂直的三个轴变换成敏感轴的矩阵;

V ——惯性传感器的个数。

若根据各冗余系统模型中惯性传感器的输入轴和相互垂直三个轴间的关系如式 (5-1-1) ~ 式 (5-1-5) 来求 H 的各元素 H_{ij} ($i = 1 \sim 3$, $j = 1 \sim V$) 如表 5-2-1 所示, 无故障时, 就要按照上式求出 M 的各元素 M_{ij} ($i = 1 \sim 3$, $j = 1 \sim V$) 后用于变换;

$$[\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T = M_{ij} [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_V]^T \quad (5-2-2)$$

而发生故障时, 要从 H 中去掉与故障惯性传感器 l ($l = 1 \sim V$) 的轴和垂直的三个轴间相关联的行 (H_{1l} 、 H_{2l} 、 H_{3l}), 用去掉该行的矩阵 H_l 确定伪逆矩阵为:

$$M_l = (H_l^T H_l)^{-1} H_l^T \quad (5-2-3)$$

并用此 M_l 代入式 (5-2-2) 来变换惯性传感器的输出。即便是在两个惯性传感器 l 、 m ($l, m = 1 \sim V$, $l \neq m$) 或三个惯性传感器 l 、 m 、 n ($l, m, n = 1 \sim V$, $l \neq m$, $m \neq n$, $n \neq l$) 出故障时也同样从 H 中把与故障惯性传感器有关的 H 的行 (l , m , n) 去掉, 用去掉该行的矩阵 H_{lm} 、 H_{lmn} 来求得伪逆矩阵 M_{lm} 、 M_{lmn} , 即

$$M_{lm} = [H_{lm}^T \ H_{lm}^T]^{-1} H_{lm}^T \quad (5-2-4)$$

$$M_{lmn} = [H_{lmn}^T \ H_{lmn}^T]^{-1} H_{lmn}^T \quad (5-2-5)$$

表5-2-1 各冗余系统的H元素

元素	4S系统№1	4S系统№2	4S系统№3	5S系统	6S系统
H_{11}	1	$-\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$
H_{12}	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	0	0
H_{13}	0	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
H_{21}	0	$\frac{1}{2} \sin \alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	$\sin \alpha \cos \beta$	$-\sin \alpha$
H_{22}	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	$\sin \alpha \sin \beta$	0
H_{23}	0	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
H_{31}	0	$\frac{1}{2} \sin \alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	$-\sin \alpha \cos \frac{\beta}{2}$	$\cos \alpha$
H_{32}	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	$\sin \alpha \sin \frac{\beta}{2}$	$\sin \alpha$
H_{33}	1	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	0
H_{41}	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	$-\sin \alpha \cos \frac{\beta}{2}$	$\cos \alpha$
H_{42}	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$	$\sin \alpha \sin \frac{\beta}{2}$	$-\sin \alpha$
H_{43}	$\cos \alpha$	-1	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	0
H_{51}				$\sin \alpha \cos \beta$	0
H_{52}				$-\sin \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha$
H_{53}				$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
H_{61}				其中 $\beta = 72^\circ$	0
H_{62}					$\cos \alpha$
H_{63}					$-\sin \alpha$

将其用惯性传感器的输出进行变换即可。而上述的 M_l 、 M_{lm} 、 M_{lmn} 的 i 行 j 列元素分别表示 $M_{ij}(l)$ 、 $M_{ij}(l, m)$ 、 $M_{ij}(l, m, n)$ 。

二、惯性传感器的最佳配置

为了选出各种型式的冗余系统中惯性传感器配置角度 α 的最佳值 $\hat{\alpha}$ ，应确定评价函数。以陀螺仪为例可利用仪表误差 ϵ_i ($i = 1 \sim V$) 对沿参考正交系轴的角速度估值的

影响程度来评价, 若令 i 方向的输出角速度的真值为 ω_i , 则惯性传感器输出 $\tilde{\omega}_i$ 为:

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i + e_i \quad (j = 1 \sim V) \quad (5-2-6)$$

由于 e_i 是不能分离的, 所以实际上是利用伪逆矩阵将 $\tilde{\omega}_i$ 变换成 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 后用于姿态矩阵计算及其他用途。 e_i 本身不同于 ω_i , 对于每个惯性传感器, 它是独立的。对垂直的三个轴影响程度 E_x 、 E_y 、 E_z , 可用 e_i 乘以伪逆矩阵 M 的元素 M_{ij} ($i = 1 \sim 3$, $j = 1 \sim V$) 各项的均方根误差值来得到。无故障时, E_x 、 E_y 、 E_z 分别为:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sqrt{\sum_{j=1}^V M_{1j}^2 e_i^2} \\ E_y &= \sqrt{\sum_{j=1}^V M_{2j}^2 e_i^2} \\ E_z &= \sqrt{\sum_{j=1}^V M_{3j}^2 e_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-2-7)$$

式中的 V 是 4S、5S、6S 系统中惯性传感器的个数。作为惯性传感器的误差, 以陀螺仪为例可用校正后的不规则变动分量的标准差, 并按:

$$e_i (j = 1 \sim V) = 1.0^\circ / \text{h} \quad (5-2-8)$$

建立评价函数。如式 (5-2-8) 取 e_i 为单位量, 则在以后 e_i 值变化时, 只将其变化倍数乘以评价函数即可得到新的评价函数值。式 (5-2-7) 的 E_x 、 E_y 、 E_z 则是无故障时的方程式, 并定义为 $E_x(0)$ 、 $E_y(0)$ 、 $E_z(0)$ 为其评价函数值。用其 RSS 值来定义误差的评价量 $E_r(0)$, 由式 (5-2-7)、式 (5-2-8) 可得 $E_r(0)$ 为:

$$\begin{aligned} E_r(0) &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{E_x^2(0) + E_y^2(0) + E_z^2(0)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^V M_{ij}^2} \end{aligned} \quad (5-2-9)$$

$E_r(0)$ 成为把 $\tilde{\omega}_i$ 变换成垂直的三个轴方向分量的矩阵各元素的 RSS, 因此在出故障时, 其分析也可同样进行。在 4S 系统中, 仪表 l 出故障时的误差评价式为:

$$E_r(l) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_{ij}^2(l)} \quad (5-2-10)$$

式中 $M_{ij}(l)$ 为 M_i 的 ij 元素。对于 5S 系统、6S 系统也完全一样, 当两个仪表 l 、 m 或三个仪表 l 、 m 、 n 出故障的评价式 $E_r(l, m)$ 、 $E_r(l, m, n)$ 也是将惯性传感器输出信息加以变换的伪逆矩阵 M_{lm} 、 M_{lmn} 的各元素 RSS 值。求出 E_r 便可以知道无故障时或一、二、三惯性传感器出故障时, 其惯性传感器误差对系统产生多大程度的影响。可是, 出故障时其影响程度随哪个惯性传感器出故障而有所不同, 因此把各系统发生故障时 $E_r(l)$ 、 $E_r(l, m)$ 、 $E_r(l, m, n)$ 的 RMS 误差 E_k 作为评价函数, 令 E_k 最小的 α 为最佳配置角。若令 4S 系统中无故障和一个惯性传感器出故障时的 E_k 分别为 $E_k(4, 0)$ 、 $E_k(4, 1)$, 则

$$\left. \begin{aligned} E_R(4, 0) &= E_r(0) \\ E_R(4, 1) &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 E_i^2(1)/4} \end{aligned} \right\} \quad (5-2-11)$$

从表5-2-1和式(5-2-9)可知,各 M_{ij} 为 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 或常数项,而根据式(5-2-11)~式(5-2-15)所示, E_R 可以用 M_{ij} 的平方来表示,因此各 E_R 可作为 $\sin^2 \alpha$ 的函数而表示出来。在求系统最佳配置角时,取

$$u = \sin^2 \alpha \quad (5-2-12)$$

用 u 表示每个 E_R 值,求出使 E_R 为最小的 u 即可。这里就4S系统中一、二、三方案将各 E_R 用 u 的函数表示出来,再求使 E_R 为最小的 u 所对应 α 的大小。先以4S系统中第一方案为例,首先根据式(5-2-1)、式(5-2-2)及式(5-2-9)~式(5-2-12)各式求得:

$$\left. \begin{aligned} E_R(4, 0) &= \sqrt{\frac{5}{2}} \\ E_R(4, 1) &= \sqrt{-\frac{1}{2} \left(3 + \frac{4}{u} + \frac{1}{1-u} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (5-2-13)$$

由此求得 E_R 为最小的 u 为:

$$\hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} = \frac{2}{3} \quad (5-2-14)$$

由式(5-2-14)可得 $\hat{\alpha} \approx 54.7^\circ$ 。

用同样的步骤可求出4S系统中第三方案的 E_R 和 \hat{u} ,其式子为:

$$\left. \begin{aligned} E_R(4, 0) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4-3u}{u(1-u)}} \\ E_R(4, 1) &= \sqrt{\frac{4-3u}{2u(1-u)}} \\ \hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (5-2-15)$$

从上式可得第三方案中最佳配置角 $\hat{\alpha} = 54.7^\circ$ 。而在4S系统中,第二方案的 E_R 和 \hat{u} 的计算式为:

$$\left. \begin{aligned} E_R(4, 0) &= \sqrt{\frac{16-9u}{3u(4-3u)}} \\ E_R(4, 1) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27u^2-90u+64}{3u(1-u)}} \\ \hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} &= \frac{8}{9} \end{aligned} \right\} \quad (5-2-16)$$

此时最佳配置角 $\hat{\alpha} \approx 70.5^\circ$ 。

对于5S系统无故障时和一、二敏感元件出故障时的 E_R 分别取 $E_R(5, 0)$ 、 $E_R(5, 1)$ 和 $E_R(5, 2)$ 。这些 E_R 和4S系统的情况完全一样,将 α 作为函数求出最佳

配置角。但由于5 S系统中包含有 β ，因此把有故障的 E_K 以 α 的函数形式表示出来就比较困难。从机械加工的工艺性考虑，角 β 一般取 72° 。这样，首先要算出角 α 从 $0^\circ \sim 90^\circ$ 时的 E_K ，预测使 E_K 为最小值的 $\hat{\alpha}$ 。其计算结果如图5-2-1所示。

从图中可以看出，使 $E_K(5, 0)$ 最小的 α 和 $E(5, 1)$ 、 $E(5, 2)$ 最小的 α 是一致的。由于 $E_K(5, 0)$ 可表示为：

$$\begin{cases} E_K(5, 0) = E_r(0) = \sqrt{\frac{4-3u}{5u(1-u)}} \\ \hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

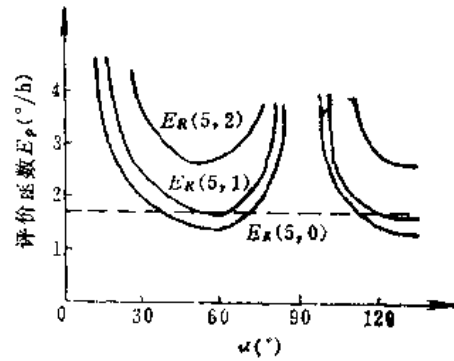


图5-2-1 5 S系统 E_K 曲线

对于5 S系统，则可将 $\hat{\alpha} \approx 54.7^\circ$ 作为 α 的最佳值。

对于6 S系统最多容许三个惯性敏感器出故障，所以 E_K 有 $E_K(6, 0)$ 、 $E_K(6, 1)$ 、 $E_K(6, 2)$ 和 $E_K(6, 3)$ ，若将它们用 u 的函数表示，则有：

$$\left. \begin{aligned} E_K(6, 0) &= E_r(0) = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ E_K(6, 1) &= \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^6 E_r^2(l)}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ E_K(6, 2) &= \sqrt{\frac{\sum_{l, m=1}^6 E_r^2(l, m)}{15}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} \left[\frac{1+u-u^2}{2u(1-u)} + \frac{2(5-u+u^2)}{1-u+u^2} \right]} \\ E_K(6, 3) &= \sqrt{\frac{\sum_{l, m, n=1}^6 E_r^2(l, m, n)}{20}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{20} \left[\frac{3(1+u-u^2)}{u^2(1-u)^2} + \frac{24(1-3u+3u^2)}{(2u-1)^2(u^2-u+1)} \right]} \\ \hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \end{aligned} \right\} (5-2-17)$$

对于六陀螺系统（6 S系统）的最佳配置是惯性敏感器测量轴和正十二面体的各平面相互垂直。在通常的3 S系统中，仅仅是无故障的状态时是可使用状态，故有

$$E_K(3, 0) = E_r(0) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 e_i^2} = \sqrt{3} \quad (5-2-18)$$

与此 $E_K(3, 0)$ 相比， $E_K(4, 0)$ 、 $E_K(5, 0)$ 、 $E_K(6, 0)$ 的最佳值分别只降低了13.4%、22.5%、29.3%。这说明若惯性敏感器个数增加，则求 E_K 时的取样数也相

应增加。若取其平均值，则按最佳配置角的取法可降低误差的方差，所以说也可以用冗余技术来降低惯性传感器误差对导航参数的影响程度。

通过以上分析，可以求得在惯性传感器对相互垂直的三个轴的影响为最小的前提下，求得惯性传感器个数为四、五、六时，由一个评价函数决定的冗余系统最佳配置参数 $\hat{\alpha}$ 的假定，仅仅是为了提高可靠性。那么对于冗余系统，只要把惯性传感器作非垂直安装就可以了。但是由于配置角 α 的取法不同，各惯性传感器误差对垂直的三个轴的影响程度亦不同，所以应该求出使之影响最小的最佳配置角 $\hat{\alpha}$ 的大小。理论分析表明，各种冗余系统中最佳配置角 $\hat{\alpha}$ 与有无故障无关，这样可以作为唯一的解求出 $\hat{\alpha}$ ，并用它构成可靠度最大且 E_x 最小的冗余系统。冗余系统无故障时的 E_x 要比通常的 3 S 系统的 E_x 要小。

§ 5.3 冗余度的故障检测与隔离

故障检测与隔离 (Failure Detection and Isolation) 是捷联系统冗余技术研究的一个重要内容，简记 FDI。各种配置方案的实现，其考察指标之一就是能否实现系统的 FDI 功能，只有实现了 FDI，对其计算的可靠性数据才能成立。这里包含了两个重要概念，其一是指在存在许多噪声(无故障时，仪表的输出误差)的情况下，要检测出需要的信号(故障仪表提供的信号)；其二是要隔离故障仪表。但若几乎同时有两个故障产生时，就会给隔离带来极大的困难。

一、故障的定义

惯性传感器故障一般可以认为是该传感器功能劣化的现象。以积分陀螺为例，功能劣化大致可以分为两种状态：一是对所有输入其输出都为零的零输出状态；二是固有误差超过容许值的状态(容许值记为 THR)。前者可以看成正常的输入 (ω_{out}) 外加另一输入现象，所以可认为是与误差增大时等效。这样可以根据误差之大小来决定是否处于故障状态，但其容许值 (THR) 因其任务不同而不同。这里不另设其容许值，而是将小的误差值也看作故障来进行分析。陀螺的固有误差一般包括与加速度无关、成比例以及与平方成比例的漂移 G_0 、 G_1 、 G_2 和比例系数误差 G_r 等。这里以 G_0 为例分析故障检测功能。实际上，误差是由测量值减去真实值而得到的，是不规则的变化。

二、故障检测与隔离的分类

故障检测与隔离从数学角度可分为直接法和间接法。其直接法为：设 n 个惯性传感器的测量方程为：

$$Y = HX + \varepsilon \quad (5-3-1)$$

式中 Y ——惯性传感器的输出值 n 维列向量；
 H ——惯性传感器的配置矩阵， $n \times 3$ 维；
 X ——惯性测量组件的输入参量 3 维列向量；
 ε ——惯性传感器的输出噪声 n 维列向量。

现选择一矩阵 C , $3 \times n$ 维, 且使

$$CH = 0 \quad (5-3-2)$$

若设 $V = CY$, 则有

$$V = C\varepsilon \quad (5-3-3)$$

式 (5-3-2) 的结果, 说明这种不相容状态 (The inconsistency states) 和捷联系统中惯性组件的输入量无关, 而它仅仅依赖于惯性敏感器输出的误差 (包含失效器件不正常的输出)。所有的有关检测算法都可以表示为上述 V 的线性或 2 次项的结合。

经过适当变换, 可有:

$$X = (H^T H)^{-1} H^T Y \quad (5-3-4)$$

$$\hat{\varepsilon} = \{I - H(H^T H)^{-1} H\} Y \quad (5-3-5)$$

只要对式 (5-3-4) 与式 (5-3-5) 直接进行估算, 就可以发现系统是否有故障。将惯性敏感器本身的测量值和由其他敏感器测量值所作的估值进行比较, 就可以判断故障的所在。

根据式 (5-3-2), 在冗余系统中 (例如 6 S 系统) 的垂直的三个轴方向有输入角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 时, 各敏感器输出 $\omega_j (j = 1 \sim 6)$ 为:

$$[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6]^T = H[\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T + [e_1, e_2, \dots, e_6]^T \quad (5-3-6)$$

冗余系统中把垂直的三个轴变换成惯性敏感器轴的矩阵 H 的各元素如表 5-2-1 所列。用此表可求出 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 的相互关系, 则有:

$$\begin{aligned} P_1 &= (\omega_1 - \omega_2)\cos\hat{\alpha} - (\omega_3 + \omega_4)\sin\hat{\alpha} \\ &= (e_1 - e_2)\cos\hat{\alpha} - (e_3 + e_4)\sin\hat{\alpha} \end{aligned} \quad (5-3-7)$$

根据式 (5-2-17) 有:

$$\begin{aligned} \cos\hat{\alpha} &= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \\ \sin\hat{\alpha} &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \end{aligned} \quad (5-3-8)$$

式 (5-3-7) 称为惯性敏感器输出 ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$) 间的均衡式。当惯性敏感器误差为零时, P_1 的值为零。故障检测是通过 P_1 的绝对值和容许值 (THR) 的比较而实现的。可以说对于上述四个以上的任意一个惯性敏感器输出都可以这样做, 即 $C_i = \frac{6!}{4!(6-4)!}$ 。

因此总共存在相对应的十五种组合的均衡式, 令各种均衡式为 $p_i (i = 1, 2, \dots, 15)$, 则它们就可变成:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{15} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_6 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (5-3-9)$$

其中 A 是系数矩阵。

15 行、6 列矩阵 A 为:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\hat{\alpha} & -\cos\hat{\alpha} & -\sin\hat{\alpha} & -\sin\hat{\alpha} & 0 & 0 \\ -\sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & 0 & -\sin\hat{\alpha} & 0 \\ -\cos\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & 0 & 0 & -\sin\hat{\alpha} \\ -\cos\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} & 0 & \cos\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} & 0 \\ -\sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & 0 & \cos\hat{\alpha} & 0 & \sin\hat{\alpha} \\ -\sin\hat{\alpha} & -\sin\hat{\alpha} & 0 & 0 & \cos\hat{\alpha} & -\cos\hat{\alpha} \\ -\sin\hat{\alpha} & 0 & -\sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & 0 \\ \sin\hat{\alpha} & 0 & -\cos\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} & 0 & \cos\hat{\alpha} \\ \cos\hat{\alpha} & 0 & -\sin\hat{\alpha} & 0 & -\sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} \\ -\cos\hat{\alpha} & 0 & 0 & \sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & -\sin\hat{\alpha} \\ 0 & -\sin\hat{\alpha} & -\cos\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & 0 \\ 0 & \sin\hat{\alpha} & -\sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & 0 & \cos\hat{\alpha} \\ 0 & \cos\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} & 0 & -\cos\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} \\ 0 & \cos\hat{\alpha} & 0 & \sin\hat{\alpha} & -\sin\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} \\ 0 & 0 & -\cos\hat{\alpha} & \cos\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} & \sin\hat{\alpha} \end{pmatrix} \quad (5-3-10)$$

由式 (5-3-10) 可看出, 各 p_i 是 e_j ($j = 1 \sim 6$) 的函数。当某个惯性传感器出现超过容许值的误差时, 包含其传感器输出的 p_i 的绝对值就比容许值 THR 大, 所以可进行故障判断。当然因 e_j 不能从 ω_j 中分离出来, 也就相当于将 ω_j 代入 p_i 中。包含某一惯性传感器 j ($j = 1 \sim 6$) 的输出的 p_i 式有十个, 将其取 Q_{jk} ($k = 1 \sim 10$), 即 $C_j^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$, 如将剩下的五个 p_i (不包括传感器 j 的输出) 作为 p_{jl} ($l = 1 \sim 5$), 即 $C_j^4 = \frac{5!}{4!} = 5$ 。当惯性传感器 j 出了故障, 则有:

$$|Q_{jk}(k = 1 \sim 10)| \geq \text{THR} > |p_{jl}(l = 1 \sim 5)| \quad (5-3-11)$$

所谓间接法, 即依靠对所谓奇偶方程的计算、比较来发现冗余系统是否有故障和故障惯性传感器的位置。这里用四个矢量之间的线性相关性质来说明进行故障检测与隔离的原理。如图 5-3-1 所示, 设有三个不共面的矢量 E_i, E_j, E_k , 任何一矢量都可以作为由平行于这三个矢量的三边所构成的平行六面体的对角线, 这样, 该任意矢量就可以通过三个不共面的矢量来表示, 即

$$E_s \approx mE_i + nE_j + pE_k \quad (5-3-12)$$

式中, m, n, p 为任意比例系数。进一步推导可知, 在一般的情况下, 任何四个矢量都存在如下关系式:

$$aE_i + bE_j + cE_k + dE_s = 0 \quad (5-3-13)$$

这个关系式表示了四个空间矢量的线性相关关系, 也就是说, 第四个矢量与其他三个矢量是线性相关的。

若四个矢量为四个角速率矢量, 那么也满足式 (5-3-13)。当用陀螺仪去感测四个

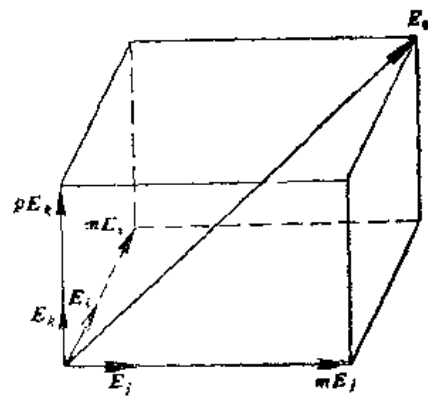


图5-3-1 四个矢量线性相关示意图

角速率矢量时，并略去陀螺仪的测量误差，则四个陀螺仪的测量值 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 、 ω_4 也应满足下列线性相关方程：

$$\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3 + \delta\omega_4 = 0 \quad (5-3-14)$$

根据方程 (5-3-14) 可以判断四个陀螺的工作是否正常。当四个陀螺的测量结果符合上述关系时，即式 (5-3-14) 成立，则说明四个陀螺仪工作正常。否则，当式 (5-3-14) 不成立，便说明四个惯性传感器中至少有一个出了故障。这样，故障检测问题便可以转换为线性相关方程的逻辑判断问题。在故障检测与隔离中，通常把方程称为奇偶方程式。

进一步考察可以看出，奇偶方程式应选择成从仪表测量输出值的综合中消去被测量的影响。例如，从陀螺仪的输出中消去被测角速率信息，从加速度计的输出中消去被测加速度信息，只剩下与惯性传感器不定性误差有关的效应作为奇偶方程式余值被保留下来。利用奇偶方程式余值的大小来判断是否有故障。

奇偶方程式余值是惯性传感器误差、噪声的函数，同时它也受到舰船航行环境对这些不定性误差的影响。当没有故障惯性传感器出现时，这些不定误差规定了故障检测系统工作的一个基线。若有一惯性传感器发生故障，奇偶方程式余值的大小及统计参数便发生变化，它反映了这个故障的出现。例如，在产生一个较大的偏置故障时，将引起奇偶方程式余值有一个阶跃变化。当奇偶方程式或其函数值超出某一个确定的门限时，这个故障即可被检测出来。选择合适的门限值，是故障检测与隔离系统设计中的一个十分重要的课题。选择门限值的基本思路是：它能检测与隔离出尽可能小的故障且又保证系统有最好的性能（例如故障检测灵敏度及正确检测概率等），还要把由惯性传感器噪声、量化等产生的虚假检测的可能性减至最小。除了考虑上述高频噪声影响而设置的常值门限外，还要考虑舰船机动航行的效应，设置动态故障检测门限值，这是因为机动航行中奇偶方程式余值的指标值会增大。

表5-3-1 四个惯性传感器奇偶方程式

序 号	传感器组合				奇 偶 方 程 式
1	1	2	3	4	$(\omega_1 - \omega_2) c - (\omega_3 + \omega_4) s \leq T $
2	1	2	3	5	$(\omega_2 + \omega_3) c - (\omega_1 + \omega_5) s \leq T $
3	1	2	3	6	$(\omega_3 - \omega_1) c + (\omega_2 - \omega_6) s \leq T $
4	1	2	4	5	$(\omega_4 - \omega_1) c + (\omega_2 + \omega_5) s \leq T $
5	1	2	4	6	$(\omega_2 + \omega_4) c - (\omega_1 - \omega_6) s \leq T $
6	1	2	5	6	$(\omega_5 - \omega_6) c - (\omega_1 + \omega_2) s \leq T $
7	1	3	4	5	$(\omega_4 + \omega_5) c - (\omega_1 + \omega_3) s \leq T $
8	1	3	4	6	$(\omega_6 - \omega_3) c + (\omega_1 + \omega_4) s \leq T $
9	1	3	5	6	$(\omega_1 + \omega_6) c - (\omega_3 + \omega_5) s \leq T $
10	1	4	5	6	$(\omega_5 - \omega_1) c + (\omega_4 - \omega_6) s \leq T $
11	2	3	4	5	$(\omega_5 - \omega_3) c + (\omega_4 - \omega_2) s \leq T $
12	2	3	4	6	$(\omega_4 + \omega_6) c + (\omega_2 - \omega_3) s \leq T $
13	2	3	5	6	$(\omega_2 - \omega_5) c + (\omega_3 + \omega_6) s \leq T $
14	2	4	5	6	$(\omega_2 + \omega_6) c + (\omega_4 - \omega_5) s \leq T $
15	3	4	5	6	$(\omega_4 - \omega_3) c + (\omega_5 + \omega_6) s \leq T $

$$c = \cos \hat{\alpha} = 0.85065$$

$$s = \sin \hat{\alpha} = 0.52573$$

考虑到图 5-1-6 中的 6 S 系统利用六个惯性传感器十二面体配置中的对称性，按四

个惯性传感器测量值之间的线性相关性，可以列出15个奇偶方程式，如表5-3-1所示。表中 T 为故障检测门限。可以看到，若所有惯性传感器都正常工作，则上述全部奇偶方程式都能满足。若出现故障，则相应的奇偶方程式便不成立。

表5-3-2 奇偶检验真值表

故障传感器	奇 偶 检 验 值															重编 程序	传感器性能 管理状态
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}		
没有	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p_0	能进行故障 检测与故障播 离
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	p_1	
2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	p_2	
3	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	p_3	
4	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	p_4	
5	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	p_5	
6	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	p_6	
1.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	p_7	
1.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	p_8	
1.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	p_9	
1.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	p_{10}	
1.6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	p_{11}	
2.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	p_{12}	
2.4	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	p_{13}	
2.5	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	p_{14}	
2.6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	p_{15}	
3.4	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	p_{16}	
3.5	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	p_{17}	
3.6	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	p_{18}	
4.5	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	p_{19}	
4.6	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	p_{20}	
5.6	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	p_{21}	
三个或三个 以上传感器失 效	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	p_{22}	只能进行故 障检测

若把上述第 i 个奇偶方程式与一个二进制 K_i 联系起来，当相应的奇偶方程式成立时， $K_i=0$ ；当它不能成立时， $K_i=1$ 。由上述原则可以建立起进行故障识别的真值表（表5-3-2）。当所有的惯性传感器工作正常，则 $K_1 \sim K_{15}$ 均为零。系统数据处理程序标号取为 p_0 ，若惯性传感器1失效，则与惯性传感器1测量值 ω_1 有关的方程式不成立， $K_1 \sim K_{10}$ 等于1，而与 ω_1 无关的奇偶检验值 $K_{11} \sim K_{15}$ 均为零，此时系统数据处

理程序标号为 p_1 ，它和 p_0 的区别是已把测量矩阵 H 及测量矢量 ω 中与 ω_1 有关的行置零。这样便将惯性传感器1进行了故障隔离。若又有一个惯性传感器出了故障，则将检验其余的奇偶值 $K_{11} \sim K_{16}$ ，亦可以对故障传感器进行隔离。倘若有三个传感器失效，则奇偶方程式没有一个满足，所有奇偶检验值为1，此时只能对故障进行检测，但不能实行隔离，所以六个惯性传感器十二面体配置方案具有故障——工作/故障——工作/故障——安全的冗余等级。从可靠性角度看，它相当于四套平台系统并行工作，借助于辅助诊断，比较各奇偶方程式余值的相对值及符号，也可能识别第三个故障。只要有三个传感器是好的，系统仍可继续工作。

三、系统重新编排

对故障传感器进行检测与隔离后，下一步的工作是把故障传感器测量值从数据处理程序中去掉，并实现系统的重新编排。这项工作并不需要改变硬件，而是通过计算机改变软件程序来实现的。与表5-3-2前21种故障状态相应的系统重编程序是求解下列数据处理方程式：

$$\hat{\omega} = (H_i^T H_i)^{-1} H_i^T \omega_i \quad (i = 1 \sim 21) \quad (5-3-15)$$

例如，六个惯性传感器重编程序的标号 p_1 所对应的 ω_1 、 H_1 为：

p_1 ：

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

再如，六个惯性传感器重编程序的标号 p_{15} 所对应的 ω_{15} 、 H_{15} 为：

p_{15} ：

$$\omega_{15} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_6 \end{pmatrix} \quad H_{15} = \begin{pmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

当有三个和三个以上的仪表失效时，系统不可能重新编排，此时计算机应报告全部系统出了故障。

具体执行系统重编时，可应用加权的最小二乘法估计值公式进行计算，即

$$\hat{\omega} = (H^T W H)^{-1} H^T W \omega \quad (5-3-16)$$

式中 ω ——仪表测量值的 n 维测量矢量；

H —— $n \times 3$ 的测量矩阵；

W —— $n \times n$ 对称正定加权矩阵。

这是因为在对随机测量误差的统计特性不完全了解的情况下，常用的数据处理方法是加权最小二乘估计。

显然， $\hat{\omega}$ 是测量数据 ω 的线性函数，又称这种估计是线性估计。

将加权矩阵 W 换成能反映传感器是否有故障的对角线矩阵。当全部传感器都工作正常时，它是一个单位阵，即，

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ & & & 1 & & \\ 0 & 0 & \dots & & & 1 \end{pmatrix}$$

如第 i 个传感器出了故障，则与之对应的第 i 个对角元素置零。这样，在数据处理过程中即将故障传感器的测量值删除，从而完成了故障传感器的隔离和系统的重排。

四、惯性传感器的重新校准

如果出了故障的惯性传感器具有软故障，像零偏误差、刻度因素的变化或在平均值附近的指示不稳定等，均可重新校准。

通过系统重编可将故障惯性传感器隔离并转入故障分类状态，把它的输出和正常工作的惯性传感器输出进行比较，以决定发生故障的类型和需要校正的量，利用改变软件的某些参数使性能恶化的仪表恢复其功能，按自适应数据处理准则，可将惯性传感器重新编入。

对于冗余系统中的惯性传感器能实现故障检测、故障隔离、系统重编及完成惯性传感器的重新校准，这样该系统的可靠性可进一步提高。

五、检测延迟的评价函数

即便是惯性传感器故障是在 t_g 时刻产生的，也得在 δ_t 后的 $t_d = t_g + \delta_t$ 时刻才能检测出故障。这个检测延迟 δ_t 随惯性传感器不同而不同，因此令惯性传感器 j ($1 \sim 6$)的故障发生时的 δ_t 为 δ_{tj} ，把评价函数 ΔT 取为各传感器检测延迟值定义为：

$$\Delta T = \sqrt{\sum_{j=1}^6 \delta_{tj}^2 / 6} \quad (5-3-17)$$

由此来评价检测延迟的大小。当 δ_{tj} 为无限大，意味着不能检测，称为漏警现象。实际上，判断无限大是不可能的，一般将 δ_{tj} 超过 $30'$ 的情况叫作漏警。另外当惯性传感器使用过程中，虽然没有出现故障，但有时计算机判断为出了故障，即可能出现了 δ_{tj} 为负值之事。这就是无故障时检测出故障，称此为误警现象。在故障检测时，应要求没有漏警、误警现象，而且要求 ΔT 应小。

六、故障检测延迟及导航误差

由于冗余系统的故障检测不能在故障发生时进行，而是滞后某一个 δ_t 的时间。由于在该区间内使用了包含故障惯性传感器的冗余系统，因此会产生导航误差，图 5-3-2 表明了故障的产生、检测与隔离及导航诸量间的关系。由于在 t_d 以后没有使用故障惯性传感器，所以冗余系统和 t_d 以前具有同样的功能。但即便在 δ_t 区间内使用了故障惯性传感器，它对各导航参数的影响在 t_d 以后仍然表现出来。这里把从故障产生 t_g 到分离

这段时间定义为故障区间，即 $\delta_t = t_d - t_g$ 。有时也将它称为检测延迟。一般认为检测和隔离是在同一时刻进行的。

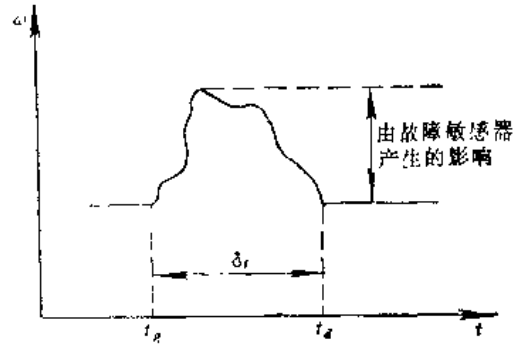


图5-3-2 故障检测、隔离的延迟和导航误差的关系

本章之内容作为提高捷联式惯性导航系统可靠性的一种方法，已较全面地讨论了从惯性传感器一级构成冗余系统的有关问题和手段；作为实用化的基本步骤，首先要确定不同个数的惯性传感器的最佳配置方案，其次要使惯性传感器故障检测成为可靠。

第六章 捷联式惯性导航系统的误差分析

§ 6.1 系统误差的分类

捷联式惯性导航系统的误差源基本上与稳定平台式惯性导航系统相似，但由于原理上的差异，故也有不同之处。读者对于稳定平台式惯性导航系已比较熟悉，这里我们分三种情况分别予以介绍。

一、捷联式系统与稳定平台式系统完全相同的误差源

这里所说的完全相同，是指不仅误差源影响系统的原理相同，而且影响的程度也相同。例如，地球参考椭球体的参数选取不同造成的误差。这是因为对于惯性导航系统，不管是稳定平台式还是捷联式，都是基于推算舰位法的原理。推算过程都要以某个基准地球参考椭球体为准，过去各国选取的基准地球参考椭球体不同，推算起来也就不同，近十多年来国际大地测量机构统一给出了椭球体参数，但也不断在变化。这一类数学模型产生的误差源不在这里加以研究，有兴趣的读者可以参看有关文献。对于初始对准误差也属于这一类误差源。

二、捷联式系统与稳定平台式系统基本相同的误差源

这里所说的基本相同，是指这误差源对系统的影响原理相同，但影响的大小程度差别很大。例如，惯性敏感器——陀螺仪与加速度计动态误差，对于稳定平台式惯性导航系统，由于陀螺仪与加速度计是安装在稳定平台上，而平台本身对舰船的运动，特别是角运动起隔离作用，所以说舰船的运动，特别是角运动，一般不会引起陀螺仪和加速度计的动态测量误差。而在捷联式惯性导航系统中，陀螺仪与加速度计直接承受舰船的运动（纵、横摇及振动），特别是角运动，所以捷联系统的陀螺仪与加速度计的动态误差要比稳定平台中的陀螺仪与加速度计的动态误差大得多。实际系统中，首先必须加以补偿。事实上惯性敏感器的误差还应包括安装误差、标度因子误差、陀螺仪的漂移与加速度计零位误差等。

三、捷联式惯性导航系统特有的误差源

数学解析平台的计算误差，这是因为捷联式惯性导航系统是在数字计算机内通过软件程序来完成其推算任务的，这些解算内容是稳定平台式惯性导航系统所不需要的。这样在数字计算机的解算过程就会出现前述的诸如：量化误差、截断误差、舍入误差等等。

§ 6.2 捷联式惯性导航系统中的惯性敏感器误差

惯性敏感器误差从其特性分类有：静态误差、动态误差及随机误差。这些误差对于捷联式惯性导航系统和稳定平台式惯性导航系统都是一样的。静态误差对稳定平台式系

统和捷联式系统情况基本相同。在稳定平台式系统中对惯性传感器的静态误差已研究得比较充分，而动态误差则不然，由于捷联式惯性导航系统中的惯性传感器直接固联在舰船上，这样舰船首向、纵横摇产生的角速度、角加速度会直接作用于惯性传感器上，惯性组件中的惯性传感器总是处在动态过程中，故动态误差对于捷联式系统是十分重要的。与随机角运动有关的随机干扰，将直接作用于惯性传感器上，这样捷联系统要比稳定平台系统的随机误差要大，故应重点加以研究。

一、惯性传感器的安装误差

捷联式惯性导航系统中的加速度计与陀螺仪直接固联在舰船上，这样惯性传感器的输入轴应和舰船坐标系的坐标轴线完全一致。但实际上安装时总是存在着一定的安装误差，因此惯性传感器构成的坐标系就是非正交坐标系。这里首先研究一下正交坐标系和非正交坐标系之间的坐标变换关系。为了简单明了起见，先来研究一下平面的情况。假设舰船平面正交坐标系为 X_b, Y_b ，两个加速度计构成非正交坐标系 X_a, Y_a ，如图 6-2-1 所示。

X_b 和 X_a 之间的夹角 θ_{xx} 、 Y_b 和 Y_a 之间的夹角为 θ_{yy} ，且由安装的不确定性， $\theta_{xx} \neq \theta_{yy}$ 。现求一矢量 V 在此两坐标系之间关系。 V 与 X_b 之间的夹角为 H ，则 V 在 X_b, Y_b 上的投影为：

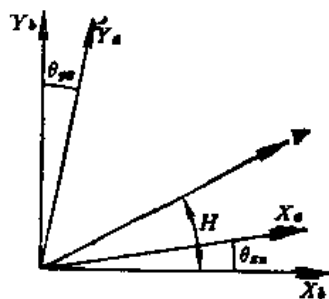


图6-2-1 加速度计非正交示意图

$$\left. \begin{aligned} V_{bx} &= V \cos H \\ V_{by} &= V \sin H \end{aligned} \right\} \quad (6-2-1)$$

V 在非正交坐标系 X_a, Y_a 上的投影，由图 6-2-1 可得，并考虑 θ_{xx}, θ_{yy} 为小量，则有：

$$\left. \begin{aligned} V_{ax} &= V \cos(H - \theta_{xx}) = V \cos H + V \theta_{xx} \sin H \\ V_{ay} &= V \sin(H - \theta_{yy}) = V \sin H - V \theta_{yy} \cos H \end{aligned} \right\} \quad (6-2-2)$$

从图 6-2-1 可以看出， b 坐标系与 a 坐标系之间的变换矩阵为：

$$C_a^b = \begin{bmatrix} \cos \theta_{xx} & -\sin \theta_{yy} \\ \sin \theta_{xx} & \cos \theta_{yy} \end{bmatrix}$$

因 θ_{xx}, θ_{yy} 为小角度，故有：

$$C_a^b \approx \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{yy} \\ \theta_{xx} & 1 \end{bmatrix}$$

且 $b-a$ 与 $a-b$ 坐标系之间的变换关系为：

$$C_b^a = (C_a^b)^T$$

这样，一个矢量 V 在两个坐标系之间的变换关系有： $V^a = (C_a^b)^T V^b$ ，即：

$$\begin{bmatrix} V_{ax} \\ V_{ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{yy} \\ -\theta_{xx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{bx} \\ V_{by} \end{bmatrix} \quad (6-2-3)$$

故有：

$$\left. \begin{aligned} V_{ax} &= V_{bx} + \theta_{xx} V_{by} \\ V_{ay} &= V_{by} - \theta_{yx} V_{bx} \end{aligned} \right\}$$

把式 (6-2-1) 代入上式，则有：

$$\left. \begin{aligned} V_{ax} &= V \cos H + V \theta_{xx} \sin H \\ V_{ay} &= V \sin H - V \theta_{yx} \cos H \end{aligned} \right\}$$

上式即为式 (6-2-2)，它说明式 (6-2-3) 的变换是正确的。现来求 V 在正交坐标系 b 与非正交坐标系 a 之间的关系。若要把 V^a 变换成 V^b ，即 $V^b = C_a^b V^a$ 。

$$\begin{bmatrix} V_{bx} \\ V_{by} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{yx} \\ \theta_{xx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \cos H + V \theta_{xx} \sin H \\ V \sin H - V \theta_{yx} \cos H \end{bmatrix}$$

展开并略去二阶小量，得：

$$\left. \begin{aligned} V_{bx} &\doteq V \cos H + V \theta_{xx} \sin H - V \theta_{yx} \sin H \\ V_{by} &\doteq V \sin H - V \theta_{yx} \cos H + V \theta_{xx} \cos H \end{aligned} \right\} \quad (6-2-4)$$

这说明正确安装的加速度计（成正交）与实际安装于非正交位置的加速度计之间所敏感的矢量值是不同的。若略去二阶小量的情况下，它们的关系为：

$$\left. \begin{aligned} V_{bx} &= V \cos H + \Delta V_{bx} \\ V_{by} &= V \sin H + \Delta V_{by} \end{aligned} \right\} \quad (6-2-5)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta V_{bx} &= V \theta_{xx} \sin H - V \theta_{yx} \sin H \\ \Delta V_{by} &= -V \theta_{yx} \cos H + V \theta_{xx} \cos H \end{aligned}$$

即 $V^b \doteq C_a^b V^a$ ，这说明从非正交坐标系变换到正交坐标系是不成立的。这是因为一个矢量分解到正交坐标系是按投影关系进行的，而分解到非正交坐标系则不是按投影关系进行的。从数学上来讲，一个非正交变换矩阵和其转置阵的乘积不等于单位阵，即由式

$$V^a = (C_a^b)^T V^b$$

两边乘以 C_a^b 后，有：

$$C_a^b V^a = C_a^b (C_a^b)^T V^b \quad (6-2-6)$$

根据式 (6-2-5)，则有：

$$C_a^b (C_a^b)^T \doteq I \quad (6-2-7)$$

故可把 C_a^b 写成 $C_a^b = I + \Delta C_a^b$ 的形式。其中：

$$\Delta C_a^b = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{yx} \\ \theta_{xx} & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$C_a^b (C_a^b)^T = (I + \Delta C_a^b) [I + (\Delta C_a^b)^T]$$

略去二阶微量，则有：

$$C_a^b (C_a^b)^T = I + \Delta C_a^b + (\Delta C_a^b)^T$$

代入式 (6-2-6)，则有：

$$\begin{aligned} V^b &= [I + \Delta C_a^b + (\Delta C_a^b)^T]^{-1} C_a^b V^a \\ &= [I - \Delta C_a^b - (\Delta C_a^b)^T] (I + \Delta C_a^b) V^a \\ &\approx [I - (\Delta C_a^b)^T] V^a \end{aligned}$$

将等式右边中括号内式子记为 $\overset{*}{C}_a^b$, 即

$$\overset{*}{C}_a^b \triangleq I - (\Delta C_a^b)^T \quad (6-2-8)$$

所以, 用 $\overset{*}{C}_a^b$ 来代替 C_a^b 而使非正交变换也具有正交变换类似的形式, 即

$$V^b = \overset{*}{C}_a^b V^a \quad (6-2-9)$$

现在我们将平面(两轴)的情况推广至立体(三轴)的情况, 如三个陀螺仪的三个输入轴应和舰船的三个坐标重合, 但由于安装有误差, 则呈现出如图 6-2-2 所示的关系, 可由 θ_{zx} 、 θ_{yz} 、 θ_{xy} 、 θ_{yx} 、 θ_{xz} 、 θ_{zy} 三组六个参数来描述, 此时加速度计坐标系与陀螺坐标系都是非正交坐标系, 它们的安装误差角都是小量, 所以和舰船坐标系之间的变换矩阵, 按上面推导可以写成:

$$C_a^b = I + \Delta C_a^b \quad (6-2-10)$$

式中 ΔC_a^b 可以写成:

$$\Delta C_a^b = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{yz} & \theta_{xy} \\ \theta_{zx} & 0 & -\theta_{xz} \\ -\theta_{xy} & \theta_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (6-2-11)$$

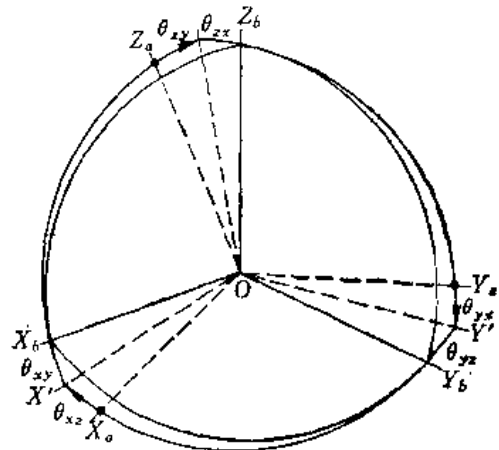


图6-2-2 三轴安装误差角

现在根据图 6-2-2 所示来证明式(6-2-11)的成立。图中 OX' 为 OX_a 在平面 $OZ_b X_b$ 上的投影, 二者的夹角为 θ_{xz} , OX' 与 OX_b 夹角为 θ_{xy} , 这样 OX_a 与 OX_b 之间可以用上述两个参数 θ_{xz} 、 θ_{xy} 来描述其关系; 同理, OY' 为 OY_a 在平面 $OX_b Y_b$ 上的投影, OY_a 与 OY_b 之间关系可以用两个小角度 θ_{yx} 、 θ_{yz} 来描述; 面 OZ_a 与 OZ_b 也可以用两个小角度 θ_{zy} 、 θ_{zx} 来描述。

从图 6-2-2 中可以将非正交坐标系 OX_a 、 OY_a 、 OZ_a 表示成正交坐标系 $OX_b Y_b Z_b$ 的关系式如下:

$$\begin{cases} X_a = X_b \cos \theta_{xy} \cos \theta_{xz} + Y_b \sin \theta_{xz} - Z_b \sin \theta_{xy} \cos \theta_{xz} \\ Y_a = Y_b \cos \theta_{yx} \cos \theta_{yz} + Z_b \sin \theta_{yz} - X_b \sin \theta_{yz} \cos \theta_{yx} \\ Z_a = Z_b \cos \theta_{zx} \cos \theta_{zy} + X_b \sin \theta_{zy} - Y_b \sin \theta_{zx} \cos \theta_{zy} \end{cases} \quad (6-2-12)$$

考虑到 θ_{xz} 、 θ_{xy} 、 θ_{yz} 、 θ_{yx} 、 θ_{zy} 、 θ_{zx} 均为小角度, 则式 (6-2-12) 忽略二阶小量后有:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \theta_{xz} & -\theta_{xy} \\ -\theta_{yz} & 1 & \theta_{yx} \\ \theta_{zy} & -\theta_{zx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{yz} & \theta_{xy} \\ \theta_{xz} & 1 & -\theta_{zx} \\ -\theta_{xy} & \theta_{yz} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6-2-13)$$

其中

$$C_a^b \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \theta_{xx} & -\theta_{xy} \\ -\theta_{yx} & 1 & \theta_{yz} \\ \theta_{xy} & -\theta_{xz} & 1 \end{bmatrix}$$

或者写成:

$$C_a^b = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{yx} & \theta_{xy} \\ \theta_{xx} & 1 & -\theta_{xz} \\ -\theta_{xy} & \theta_{yz} & 1 \end{bmatrix} \quad (6-2-14)$$

式(6-2-14)可以写成:

$$C_a^b = I + \Delta C_a^b \quad (6-2-15)$$

其中

$$\Delta C_a^b \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{yx} & \theta_{xy} \\ \theta_{xx} & 0 & -\theta_{xz} \\ -\theta_{xy} & \theta_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (6-2-16)$$

称 C_a^b 为加速度计组件坐标系与舰船坐标系之间的变换矩阵, 同理可用 C_g^b 表示陀螺仪组件坐标系与舰船坐标系之间的变换矩阵, 即有:

$$C_g^b = I + \Delta C_g^b \quad (6-2-17)$$

其中 ΔC_g^b 形式与 ΔC_a^b 相同。

现在, 若要把加速度计组件测量的比力 \tilde{S}_a^b 正确地变换为舰船坐标系上的比力 S_a^b , 按式(6-2-9)的关系, 其相应变换为:

$$S_a^b = [I - (\Delta C_a^b)^T] \tilde{S}_a^b \quad (6-2-18)$$

同理, 若要把陀螺仪组件测量的角速率 $\tilde{\omega}_g^b$ 正确地变换到舰船坐标系上的角速率 ω_g^b , 其变换关系为:

$$\omega_g^b = [I - (\Delta C_g^b)^T] \tilde{\omega}_g^b \quad (6-2-19)$$

按式(6-2-18)与式(6-2-19)进行变换, 就可以消除惯性敏感器的安装误差, 所以若知道了加速度计组件及陀螺仪组件的安装误差角, 即已知 $(\Delta C_a^b)^T$ 或 $(\Delta C_g^b)^T$ 即可消除这类误差。但这是很难做到的, 因为实际上是尽可能按精度要求精确安装好惯性敏感器, 然后测量估计出其误差值, 只要在精度允许范围内即可。在实际系统中, 若将加速度计测量的比力 \tilde{S}_a^b 近似地认为是沿舰船坐标系轴向测量的比力 \tilde{S}_b^b , 即:

$$\tilde{S}_b^b = \tilde{S}_a^b = (C_a^b)^T \tilde{S}_a^b = [I + (\Delta C_a^b)^T] \tilde{S}_b^b = \tilde{S}_b^b + (\Delta C_a^b)^T \tilde{S}_b^b \quad (6-2-20)$$

式中的 $(\Delta C_a^b)^T \tilde{S}_b^b$ 即为加速度计安装的误差。同理, 可把陀螺仪测量的角速率 $\tilde{\omega}_g^b$ 当作舰船坐标轴方向测量的角速率 $\tilde{\omega}_b^b$, 即令

$$\tilde{\omega}_b^b = \tilde{\omega}_g^b = (C_g^b)^T \tilde{\omega}_g^b = [I + (\Delta C_g^b)^T] \tilde{\omega}_b^b = \tilde{\omega}_b^b + (\Delta C_g^b)^T \tilde{\omega}_b^b \quad (6-2-21)$$

式中 $(\Delta C_g^b)^T \tilde{\omega}_b^b$ 即为陀螺仪的安装误差。

我们可以举一些具体数字来说明误差的数量级。若加速度计的安装误差为 $3'$, 舰船

的运动加速度为 $0.1g$ ，则安装误差相当于 $10^{-4}g$ 的加速度零位误差。对于陀螺仪，若有 $1'$ 的安装误差角，则大约等效于产生 $0.004''/h$ 的漂移值。显然，实际捷联系统中惯性传感器安装误差一般应为角秒级才能满足实用要求。

二、标度误差

加速度计和陀螺仪的输出一般是脉冲数或脉冲调宽的宽度等，这些基本量都最终要折合至惯性导航计算机中的几个比特 (bit) 值。每一个最基本单位对积分加速度计来说，代表一个速度增量。对于陀螺仪来说，它代表一个最小控制的角度增量。这个增量值可用 q_A 和 q_g 来表示。 q_A 称作加速度计的标度因子； q_g 称作陀螺的标度因子，它们都是通过实验测定的，其值储存在计算机内。在实时解算过程中，计算机的每次采样后，都要将采样得到的脉冲数乘以标度因子，以便得到所需的增量值。但是，惯性传感器在工作过程中的实际标度因子和存放在计算机内的标度因子可能不一致，这便是所谓的标度因子误差。这是因为测定标度因子时的环境、温度、振动和电磁干扰等与实际应用时已有所不同，即使是稳定性很好的惯性传感器也仍然存在误差。我们用 q_{Ac} 、 q_{gc} 表示存放在计算机内的标度因子，并写为：

$$\left. \begin{aligned} q_{Ac} &= q_A (1 + K_A) \\ q_{gc} &= q_g (1 + K_g) \end{aligned} \right\} \quad (6-2-22)$$

式中

$$K_A = \begin{bmatrix} K_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & K_{Az} \end{bmatrix}$$

$$K_g = \begin{bmatrix} K_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{gz} \end{bmatrix}$$

K_A 为由三个加速度计的标度因子误差量形成的对角线阵； K_g 为由三个陀螺仪的标度因子误差量形成的对角线阵。

当 X 轴具有速度增量为 ΔA_x 时，则相应的脉冲数为：

$$n = \frac{\Delta A_x}{q_{Ax}}$$

输入计算机时应乘以相应的标度因子 q_{Ac} ，这样在计算机内得到的增量为：

$$q_{Ac} \frac{\Delta A_x}{q_{Ax}}$$

考虑到式 (6-2-22)，则有：

$$\Delta \tilde{A}_x = (1 + K_{Ax}) \Delta A_x$$

对应 Y 轴、 Z 轴完全类似，分别有：

$$\Delta \tilde{A}_y = (1 + K_{Ay}) \Delta A_y$$

$$\Delta \tilde{A}_z = (1 + K_{Az}) \Delta A_z$$

上述式子写成矩阵形式即为：

$$\tilde{\Delta A} = (I + K_a)\Delta A$$

也可以写成加速度计输出的比力形式:

$$\tilde{S}_p^b = (I + K_a)S_p^b \quad (6-2-23)$$

类似地, 也可以将陀螺仪写成以下形式:

$$\tilde{\omega}_{i_b} = (I + K_g)\omega_{i_b}^b \quad (6-2-24)$$

上述式子中 $K_a S_p^b$ 与 $K_g \omega_{i_b}^b$ 即为标度因子误差量所引起的比力误差和角速度误差, 也就是加速度计和陀螺仪的标度误差。

这里我们举一些具体数字例子来说明误差的数量级。当舰船的某一方向加速度为 $0.1g$, 而标度因子误差为 0.001 时, 则等效于 $10^{-4}g$ 的加速度计零位误差。陀螺仪的标度因子误差则要求更高才能满足捷联式惯性导航系统的精度要求。一般说来, 陀螺仪标度因子误差应为百万分之几。

综上所述, 假定我们同时考虑安装误差和标度误差, 并考虑到陀螺仪本身的漂移误差和加速度计的零位误差, 则有:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_p^b &= (I + K_a)[I + (\Delta C_a^b)^T]S_p^b + \nabla^b \\ \tilde{\omega}_{i_b} &= (I + K_g)[I + (\Delta C_g^b)^T]\omega_{i_b}^b + \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (6-2-25)$$

式中 ∇ ——加速度计的零位误差;

ε ——陀螺的漂移率。

把式 (6-2-25) 展开, 并略去二阶微量, 得:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_p^b &= [I + K_a + (\Delta C_a^b)^T]S_p^b + \nabla \\ \tilde{\omega}_{i_b} &= [I + K_g + (\Delta C_g^b)^T]\omega_{i_b}^b + \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (6-2-26)$$

式 (6-2-26) 就是实用式。

三、随机误差对系统的影响

在捷联式惯性导航系统中, 对于已知为有规律的惯性敏感器的误差源对系统的影响可以通过计算方法预先加以补偿, 但其随机误差则无法预先给以补偿, 只能在采用卡尔曼滤波器的捷联系统中, 根据外部量测的信息, 估计出惯性系统误差的同时, 估计出惯性器件的随机误差。此时应先对惯性敏感器的数学模型选择得足够准确, 才可能对其随机误差给以估计。

采用卡尔曼滤波器的惯性系统首先具有以下优点: 根据外部量测的结果, 不仅可以估计惯性系统的误差, 还可以估计以下的随机变量, 例如陀螺仪的漂移率 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 和加速度计零位误差 ∇_x 、 ∇_y , 因此和没有卡尔曼滤波器的惯性系统相比, 在有卡尔曼滤波器的惯性系统中, 对惯性敏感器的精度要求可以降低, 但是只有事先对产生随机变量 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 ∇_x 、 ∇_y 过程的数学模型选择得足够准确, 才有可能对上述变量进行估计。

作为陀螺仪漂移速度的数学模型, 有时采用维纳过程(亦称随机游动、或布朗运动), 可用下列方程来表示:

$$\dot{\epsilon}(t) = W(t)$$

式中 $W(t)$ 为白噪声，即数学期望为零的平稳随机过程，其相关函数为 δ 函数。

$$M\{W(t)\} = 0$$

$$M\{W(t)W(t')\} = Q\delta(t-t')$$

式中 $\delta(t-t')$ 为单位脉冲函数， Q 为噪声的强度。

可以证明，维纳过程的方差将随时间而增大。

$$\begin{aligned} M\{\epsilon^2(t)\} &= M\left\{\int_0^t W(\tau_1)d\tau_1 \int_0^t W(\tau_2)d\tau_2\right\} \\ &= \int_0^t \int_0^t M\{W(\tau_1)W(\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_0^t \int_0^t Q\delta(\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &= Q \int_0^t d\tau_2 = Qt \end{aligned}$$

因此，维纳过程只能在短时间内描述量测元件的随机误差，因为当 $t \rightarrow \infty$ 时，尽管产生 $\epsilon(t)$ 的干扰力矩始终是有界的，但产生陀螺仪的漂移速度 $\epsilon(t)$ 的 $M\{\epsilon^2(t)\}$ 仍将无限制地增大。

如果必须在长时间内描述量测元件的随机误差，为此一般将采用具有指数型相关函数的平稳随机过程。

$$M[\epsilon(t)\epsilon(t+\tau)] = A^2 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_1}} \tag{6-2-27}$$

这种描述可参阅参考文献〔8〕。式(6-2-27)的自相关函数相当于方波的随机过程，如图 6-2-3 所示。其幅值 α 为独立的随机变量，具有数学期望 $M(\alpha) = 0$ 和方差 $M(\sigma^2) = A^2$ 的关系；其方波宽度 T 为指数型概率密度曲线的随机变量，具有数学期望 $M(T) = \tau_1$ 。

通常陀螺仪漂移误差模型包括随机常数、随机斜坡、长相关时间指数相关随机分量和短相关时间的指数随机分量。陀螺漂移误差方块图如图 6-2-4 所示。

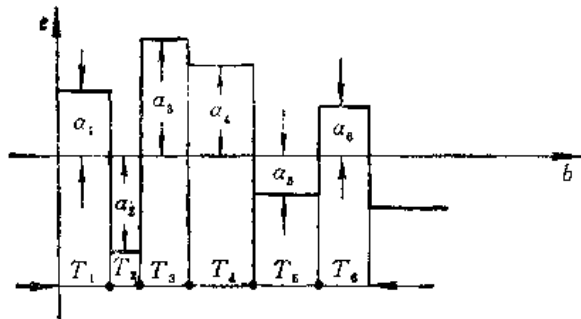


图6-2-3 自相关函数相当于方波的随机过程

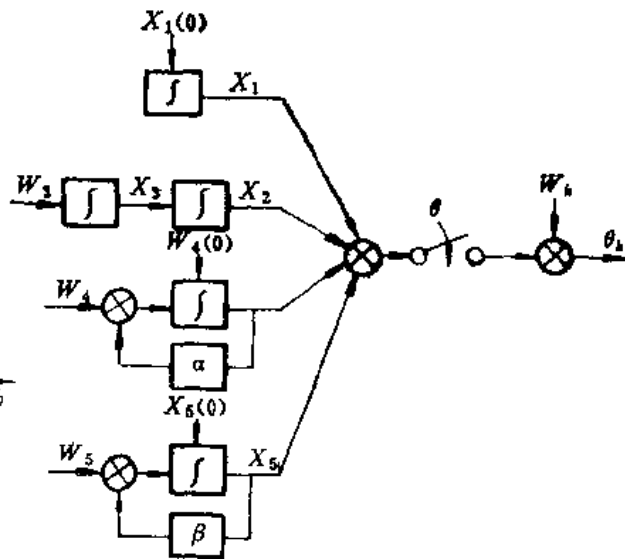


图6-2-4 陀螺漂移误差模型方块图

对于某种具体型号的陀螺，其漂移误差模型是通过大量测试数据经过数据处理来确定的。在一般分析时，为了简单起见，可把陀螺漂移看成是一个随机常数和一阶马尔柯夫过程的组成，即：

$$e(t) \approx e_0 + e_r \quad (6-2-28)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中} \quad \dot{e}_0 &= 0 \\ \dot{e}_r(t) &= -\beta e_r(t) + W_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (6-2-29)$$

加速度计的随机误差模型是随机偏置、随机斜坡和两种马尔柯夫过程的组合，同陀螺漂移的误差模型类似，在简单的情况下，可以考虑为一个一阶马尔柯夫过程，即

$$\dot{\nabla}(t) = -\mu \nabla(t) + W_2(t) \quad (6-2-30)$$

式中 $\nabla(t)$ ——加速度计的随机误差；

μ ——反相关时间；

$W_2(t)$ ——白噪声。

§ 6.3 捷联式惯性导航系统的误差分析

捷联式惯性导航系统与平台式惯性导航系统所不同的是前者以数学解析平台代替后者的稳定平台。这里为了比较二者的类似，证明数学解析平台和稳定平台具有完全相似的物理本质，采用常用的方向余弦法，力求用物理概念来推导和分析捷联式惯性导航系统的误差方程，以求对抽象的数学模型获得形象的解释。这对初学者理解系统的物理本质是有益的。

一、静基座下的姿态误差方程

如前面的假设，以 i 表示系统工作的地理坐标系，这样当不考虑误差时，姿态矩阵 T_i^b 便能理想地描述舰船坐标系相对于 i 系的坐标变换。实际上，由于系统存在着各种误差源，导航计算机实时所计算出的姿态矩阵 T_i^b 并不能理想地描述 b 系相对 i 系的关系，而只能描述 b 系相对 i 系附近的计算地理坐标系 \hat{i} 的关系，如同稳定平台式惯性导航系统中实际平台系那样；由于各种误差影响的结果，这里的 \hat{i} 系和 i 系并不重合，而是存在着小的误差角 α 、 β 、 γ ，简记为 $\phi = (\alpha \ \beta \ \gamma)^T$ 。 ϕ 的反对称矩阵为：

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

我们规定符号“ A ”表示计算值，“ \sim ”表示测量值。下面将推导误差源和系统误差之间的关系。对于捷联系统，误差源很多，这里仅考虑以下几种主要的误差源：加速度计零位漂移 ∇ ，陀螺仪的漂移 ε ，舰船的随机干扰加速度 a_i 和随机干扰角速度 ω_i 。

当舰船处于靠码头的系泊状态，可以利用外部信息测出舰船坐标系相对当地地理坐标系的姿态角。由于测量有误差，姿态角是 b 系相对 i 系的近似值，实际上为 b 系相对于计算地理坐标系 \hat{i} 的角度，由此可以在计算机中建立 $T_{\hat{i}}^b$ 矩阵，即初始“数学平台”。

捷联于舰船上的加速度计输出的量测信息 $\hat{\mathbf{a}}_{ib}^b$ ，包含有重力加速度 \mathbf{g} 、误差源 \mathbf{V} 及 \mathbf{a}_e 。这些在 b 坐标系测量出的源信息经模数变换送入计算机，并由姿态阵 T_{ib}^i 变换成 i 系上的计算值，即

$$\hat{\mathbf{a}}_{ib}^i = T_{ib}^i \hat{\mathbf{a}}_{ib}^b \quad (6-3-1)$$

如同稳定平台式惯性导航系统中平台上的加速度计输出信号一样，补偿掉其中有害加速度得到相对于地理坐标系的加速度，经积分得线速度，并进一步可得到角速度 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^i$ ；

由于舰船系泊于码头的纬度可以足够精确地测得，则地球自转角速度在该处地理坐标系中的投影分量也可以精确地表示出来。

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos \varphi \\ \omega_{ie} \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (6-3-2)$$

此时由于计算机中只有 T_{ib}^i 及其逆阵，而没有 T_{ib}^b 及其逆阵，欲将理想值 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^i$ 变换到 b 系时，实际计算时只好采用 T_{ib}^b 来变换，而由于 i 系和 b 系不重合，则将产生计算误差。

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^b = T_{ib}^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \neq T_{ib}^b \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^i = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b \quad (6-3-3)$$

现在来分析地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 在 b 系中的理想值与计算机算出的地球自转角速度在 b 系中的计算值之间的误差。

由于 i 系偏离 b 系一个小角度 $\boldsymbol{\phi} = (\alpha \ \beta \ \gamma)^T$ ，则由式 (4-1-13) 有：

$$T_{ib}^i = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} = I - \boldsymbol{\Phi}'$$

这里

$$\boldsymbol{\Phi}' = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

计算机实际算得地球自转角速度在 b 系中的计算值为：

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b &= (T_{ib}^i)^{-1} \boldsymbol{\omega}_{ie}^i = T_{ib}^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^i = T_{ib}^b T_{ib}^i \boldsymbol{\omega}_{ie}^i = T_{ib}^b (I + \boldsymbol{\Phi}') \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \\ &= T_{ib}^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^i + T_{ib}^b \boldsymbol{\Phi}' \boldsymbol{\omega}_{ie}^i = \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\Phi}^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \end{aligned} \quad (6-3-4)$$

此式表明，地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 在 b 系中的理想值和计算值之间的计算误差，以 $\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^b$ 表示为：

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^b = \boldsymbol{\Phi}^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \quad (6-3-5)$$

其物理意义在于地球自转速率的理想值是由 i 系的矢量 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^i$ 变换到 b 系的，而计算值是由 i 系的大小与矢量 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^i$ 的大小相同的矢量变换到 b 系的，这样 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 在 i 系和 b 系之间相差一个 $\boldsymbol{\Phi}'$ 小角矢量，所以在 b 系中同样也相差一个 $\boldsymbol{\Phi}'$ 小角。也就是说，在 i 系相差 $\boldsymbol{\Phi}'$ 小角的矢量在 b 系也同样相差 $\boldsymbol{\Phi}'$ 小角。理想值、计算值、计算误差三者之间的关系

如图 6-3-1 所示。根据速度合成定理有:

$$\hat{\omega}_{ie}^b + \omega_{e\hat{i}}^b = \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} \quad (6-3-6)$$

将式 (6-3-4) 代入上式, 则有:

$$\hat{\omega}_{ie}^b = \omega_{ie}^b + \delta\omega_{ie}^b + \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} \quad (6-3-7)$$

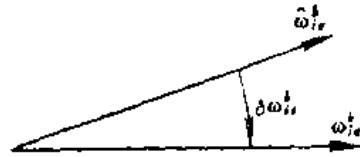


图6-3-1 地球自转角速率计算误差关系示意图

以上讨论了数学解析平台 $T_{ib}^{\hat{i}}$ 和加速度计的误差。另外在安装于载体上的陀螺仪输出的测量信号中, 除了地球自转角速率之外还包含陀螺漂移误差 ε 和干扰角速度误差 ω_s , 即

$$\tilde{\omega}_{ie}^b = \omega_{ie}^b + \omega_s^b + \varepsilon^b \quad (6-3-8)$$

令

$$\delta\omega_{ie}^b = \omega_s^b + \varepsilon^b$$

则有

$$\tilde{\omega}_{ie}^b = \omega_{ie}^b + \delta\omega_{ie}^b \quad (6-3-9)$$

称 $\delta\omega_{ie}^b$ 为测量误差。

将 $\tilde{\omega}_{ie}^b$ 陀螺输出信号经模数变换送至计算机与 $\hat{\omega}_{ie}^b$ 及 $\hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}}$ 组合产生 $\hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}}$, 有:

$$\omega_{ie}^{\hat{i}} = \tilde{\omega}_{ie}^b - \omega_{ie}^b = \tilde{\omega}_{ie}^b - (\omega_{ie}^b + \omega_{e\hat{i}}^b) \quad (6-3-10)$$

将式 (6-3-9) 及式 (6-3-7) 代入式 (6-3-10), 则有:

$$\begin{aligned} \omega_{ie}^{\hat{i}} &= \omega_{ie}^b + \delta\omega_{ie}^b - (\omega_{ie}^b + \delta\omega_{ie}^b + \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}}) \\ &= \delta\omega_{ie}^b - \delta\omega_{ie}^b - \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} \end{aligned} \quad (6-3-11)$$

将此矢量式改写成对应的张量化反对称矩阵为:

$$\hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} = \delta\omega_{ie}^{b\wedge} - \delta\omega_{ie}^{\hat{i}\wedge} - \hat{\omega}_{e\hat{i}}^{b\wedge} \quad (6-3-12)$$

根据式 (3-2-13), 可以类似写出计算地理坐标系 \hat{i} 的矩阵微分方程式:

$$\dot{T}_{ib}^{\hat{i}} = T_{ib}^{\hat{i}} \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} \quad (6-3-13)$$

由于

$$T_{ib}^{\hat{i}} = T_{ib}^{\hat{i}} T_{ib}^{\hat{i}}$$

所以有

$$\dot{T}_{ib}^{\hat{i}} = \dot{T}_{ib}^{\hat{i}} T_{ib}^{\hat{i}} + T_{ib}^{\hat{i}} \dot{T}_{ib}^{\hat{i}} \quad (6-3-14)$$

理想坐标变换 $T_{ib}^{\hat{i}} = \text{const}$, 则 $\dot{T}_{ib}^{\hat{i}} = 0$, 所以上式成为:

$$\dot{T}_{ib}^{\hat{i}} = \dot{T}_{ib}^{\hat{i}} T_{ib}^{\hat{i}} \quad (6-3-15)$$

比较式 (6-3-13) 与式 (6-3-15), 有:

$$\dot{T}_{ib}^{\hat{i}} T_{ib}^{\hat{i}} = T_{ib}^{\hat{i}} \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} \quad (6-3-16)$$

对式 (6-3-16) 两边同时乘 T_{ib}^b 矩阵后得:

$$T_{ib}^{\hat{i}} \dot{T}_{ib}^{\hat{i}} = T_{ib}^{\hat{i}} \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} T_{ib}^b = T_{ib}^{\hat{i}} T_{ib}^b \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} T_{ib}^b \quad (6-3-17)$$

而
$$T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} = (I - \Phi')$$

对上述等式两边同时微分有：

$$\dot{T}_{i\hat{i}}^{\hat{i}} = -\dot{\Phi}' \quad (6-3-18)$$

将式 (6-3-18) 代入式(6-3-17)，有：

$$\dot{\Phi}' = (I - \Phi')T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \quad (6-3-19)$$

注意到反对称矩阵 Φ' 、 $\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}$ 中元素全部为一阶小量，略去二阶小量，则式 (6-3-19) 成为：

$$\dot{\Phi}' = T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \quad (6-3-20)$$

记 Φ' 的相似变换为 $[\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}]^*$ ，即

$$[\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}]^* = T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \quad (6-3-21)$$

考虑到 $T_{i\hat{i}}^{\hat{i}}$ 为三阶正交矩阵， $\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}$ 为反对称矩阵，则 $\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}$ 的相似变换 $[\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}]^*$ 仍然是一个反对称矩阵，且 $[\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}]^*$ 的元与列向量 $\hat{\omega}_{i\hat{i}}^{\hat{i}}$ 通过 $T_{i\hat{i}}^{\hat{i}}$ 坐标变换的列向量 $\hat{\omega}_{i\hat{i}}^{\hat{i}} = T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \hat{\omega}_{i\hat{i}}^{\hat{i}}$ 的各元相等。于是有：

$$[\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}]^* = T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} = [\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}] \quad (6-3-22)$$

考虑到式 (6-3-20)~式 (6-3-22)，则有矩阵微分方程式：

$$\dot{\Phi}' = [\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}] \quad (6-3-23)$$

将此矩阵微分方程中相应的元素写成列向量相等式子。

并注意其中各元素符号，有：

$$\dot{\phi}' = -\hat{\omega}_{i\hat{i}}^{\hat{i}} = -T_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \hat{\omega}_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \quad (6-3-24)$$

此式有着鲜明的物理意义，左端为 i 系相对 \hat{i} 系的误差角运动，如同在平台式惯性导航系统中稳定平台台体 P 相对 i 系的姿态误差角运动一样，右端为引起姿态误差角的误差源。由式 (6-3-11) 可见误差源有三种类型：一是陀螺的测量误差；二是加速度计的测量误差经前向通道变换成的误差角速度；三是外部信号建立的初始数学平台不理想而引起的计算误差。其中负号是因为左端是 \hat{i} 系相对 i 系的运动，而右端是 b 系相对 \hat{i} 系的运动，在静基座情况下 b 系相对 i 系的运动而确定的姿态角，故右端为 i 系相对 \hat{i} 系的运动，与左端正好相反，故有负号。

将式 (6-3-11) 代入式 (6-3-24)，有：

$$\dot{\phi}' = -\delta\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} + \delta\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} + \hat{\omega}_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \quad (6-3-25)$$

注意到 $\delta\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} = \Phi' \omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}}$ 将上式写成列向量形式有：

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \\ \delta\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \\ \delta\omega_{i\hat{i}}^{\hat{i}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{e\hat{i}}^{\hat{i}} \\ \hat{\omega}_{e\hat{i}}^{\hat{i}} \\ \hat{\omega}_{e\hat{i}}^{\hat{i}} \end{bmatrix} \quad (6-3-26)$$

其中由加速度计的测量信号经前向通道变换而来的误差角速度为：

$$\hat{\omega}_s^i = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_s^{i,x} \\ \hat{\omega}_s^{i,y} \\ \hat{\omega}_s^{i,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta\hat{V}^{xy}/R \\ \delta\hat{V}^{xz}/R \\ \delta\hat{V}^{yz}\text{tg}\varphi/R \end{bmatrix} \quad (6-3-27)$$

陀螺的测量误差是随机变量,为了在形式上和平台式惯性导航系统中误差方程一致,测量误差取负号,于是静基座下捷联式惯性导航系统的姿态误差方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta\hat{V}^{xy}/R \\ \delta\hat{V}^{xz}/R \\ \delta\hat{V}^{yz}\text{tg}\varphi/R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{ix} + \omega_d^{ix} \\ e^{iy} + \omega_d^{iy} \\ e^{iz} + \omega_d^{iz} \end{bmatrix} \quad (6-3-28)$$

其中 $\omega_1 = \omega_s \cos\varphi$, $\omega_2 = \omega_s \sin\varphi$.

这一捷联式惯性导航系统的姿态误差方程和一般文献中稳定平台式惯性导航系统的姿态误差方程形式上是一致的,隐含在导航计算机中的数学解析平台和实际的常平架稳定平台在其物理本质上是一致的。从而可认为捷联系统中的“软件平台”取代了平台式惯性导航系统的硬件平台。

二、速度误差方程

由加速度计测得的加速度信息经过数学解析平台变换成计算地理坐标系下的计算值为:

$$\hat{a}_{ib}^i = T_i^i \hat{a}_{ib}^b = T_i^i T_i^i \tilde{a}_{ib}^i = T_i^i \tilde{a}_{ib}^i = (I - \Phi^i) \tilde{a}_{ib}^i \quad (6-3-29)$$

为了简便,略去下标“ib”,但仍表示绝对运动,即

$$\hat{a}^i = (I - \Phi^i) \tilde{a}^i \quad (6-3-30)$$

上式相当于平台式惯性导航系统中加速度计输出的比力信号。在静基座条件下,当补偿有害加速度时间平台式惯性导航系统一样的话,也会错误地引入哥氏加速度和向心加速度。由于向心加速度是二阶小量,可略去不计。加速度计检测信息中含有 g 、 V 、 $2\omega_s \sin\varphi \delta\hat{V}$ 、 a_d^i 等成分。

设误差项为:

$$\delta a_{ib}^i = 2\omega_s \sin\varphi \delta\hat{V} + V^i + a_d^i \quad (6-3-31)$$

式中 V^i ——加速度计的零位误差;

a_d^i ——干扰加速度引起的检测误差。

$2\omega_s \sin\varphi \delta\hat{V}$ ——哥氏加速度带来的检测误差。

这样,在静基座条件下,则有:

$$\tilde{a}_{ib}^i = (\delta a_{ib}^{ix} \quad \delta a_{ib}^{iy} \quad \delta a_{ib}^{iz} + g)^T \quad (6-3-32)$$

将式(6-3-32)代入式(6-3-30),则有:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{ib}^{ix} \\ \hat{a}_{ib}^{iy} \\ \hat{a}_{ib}^{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{ix} + 2\omega_s \sin\varphi \delta\hat{V}^{ix} + a_d^{ix} \\ V^{iy} - 2\omega_s \sin\varphi \delta\hat{V}^{iy} + a_d^{iy} \\ V^{iz} + g + a_d^{iz} \end{bmatrix} \quad (6-3-33)$$

在初始对准中, 作为控制信息, 常用的是水平加速度计信息, 而不用垂直信息展开上式, 略去二阶小量, 得水平通道速度误差方程为:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}^{\hat{x}} &= 2\omega_{ie}\sin\varphi\delta\hat{V}^{\hat{y}} - \beta g + \nabla^{\hat{x}} + a_a^{\hat{x}} \\ \hat{a}^{\hat{y}} &= -2\omega_{ie}\sin\varphi\delta\hat{V}^{\hat{x}} + \alpha g + \nabla^{\hat{y}} + a_a^{\hat{y}} \end{aligned} \right\} \quad (6-3-34)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \delta\hat{V}^{\hat{x}} &= \int_{t_1}^{t_2} \hat{a}^{\hat{x}} dt \\ \delta\hat{V}^{\hat{y}} &= \int_{t_1}^{t_2} \hat{a}^{\hat{y}} dt \end{aligned} \right\} \quad (6-3-35)$$

这里, 时间间隔 $[t_1, t_2]$ 为计算步长。

速度误差方程(6-3-35)是和平台式惯性导航系统的速度误差方程具有一致的形式。

在以上的论述中, 我们假设码头的经纬度可以足够精确地测量到, 但实际测得的 $\tilde{\varphi}$ 、 $\tilde{\lambda}$ 会存在测量误差: 即 $\tilde{\varphi} = \varphi + d\varphi$, $\tilde{\lambda} = \lambda + d\lambda$, 所以地球自转角速度的计算值可以表示为:

$$\hat{\omega}_{ie}^{tm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie}\cos\tilde{\varphi} \\ \omega_{ie}\sin\tilde{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie}\cos\varphi \\ \omega_{ie}\sin\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{ie}\sin\varphi d\varphi \\ \omega_{ie}\cos\varphi d\varphi \end{bmatrix} \quad (6-3-36)$$

其中 tm 为测量地理系。

由于测量足够精确, 故 $d\varphi$ 、 $d\lambda$ 为一阶小量。令:

$$\delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{tm} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{ie}\sin\varphi d\varphi \\ \omega_{ie}\cos\varphi d\varphi \end{bmatrix}$$

则有:

$$\hat{\omega}_{ie}^{tm} = \omega_{ie}^{tm} + \delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{tm} \quad (6-3-37)$$

由此可得:

$$\hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} = T_{\hat{i}}^k (\omega_{ie}^{tm} + \delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{tm}) = T_{\hat{i}}^k \omega_{ie}^{tm} + T_{\hat{i}}^k \delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{tm} \quad (6-3-38)$$

由于 $d\varphi$ 为一阶小量, 所以 $\delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{tm}$ 也是一阶小量。而 tm 和 \hat{i} 系对于理想的 i 系都只是小角度偏差, 所以也可以认为 tm 和 \hat{i} 系之间也是小角度偏差。因此可以说一阶小量在两个接近重合的坐标系中分解时其投影也是相等的, 因此有:

$$T_{\hat{i}}^k \delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{tm} = T_{\hat{i}}^k \delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} = \delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} \quad (6-3-39)$$

因 $\omega_{ie}^{\hat{i}}$ 不是小量, 故

$$T_{\hat{i}}^k \omega_{ie}^{\hat{i}} \approx \omega_{ie}^{\hat{i}}$$

这样, 式(6-3-7)可改写成:

$$\hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} = \omega_{ie}^{\hat{i}} + \delta \omega_{ie}^{\hat{i}} + \delta_1 \hat{\omega}_{ie}^{\hat{i}} + \hat{\omega}_{ie}^{\hat{k}}$$

同样, 可将式(6-3-11)、式(6-3-12)、式(6-3-25)分别写成:

$$\hat{\omega}_{i_b}^b = \delta\omega_{i_b}^b - \delta\omega_{i_e}^b - \delta_1\hat{\omega}_{i_e}^b - \hat{\omega}_{e_i}^b \quad (6-3-40)$$

$$\hat{\omega}_{i_b}^{b_k} = \delta\omega_{i_b}^{b_k} - \delta\omega_{i_e}^{b_k} - \delta_1\hat{\omega}_{i_e}^{b_k} - \hat{\omega}_{e_i}^{b_k} \quad (6-3-41)$$

$$\phi^i = -\delta\omega_{i_b}^b + \delta\omega_{i_e}^b + \hat{\omega}_{e_i}^b + \delta_1\omega_{i_e}^b \quad (6-3-42)$$

若注意到有式 (6-3-28), 则上述式 (6-3-42) 可以展开改写成:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_{i_e}\cos\varphi & -\omega_{i_e}\sin\varphi \\ -\omega_{i_e}\sin\varphi & 0 & 0 \\ \omega_{i_e}\cos\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta\hat{V}^{i^y}/R \\ \delta\hat{V}^{i^x}/R \\ \delta\hat{V}^{i^x}\text{tg}\varphi/R \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \varepsilon^{i^x} + \omega_d^{i^x} \\ \varepsilon^{i^y} + \omega_d^{i^y} \\ \varepsilon^{i^z} + \omega_d^{i^z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{i_e}\sin\varphi d\varphi \\ \omega_{i_e}\cos\varphi d\varphi \end{bmatrix} \quad (6-3-43) \end{aligned}$$

其位置误差方程是与平台式惯性导航系统一样, 该方程可以写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\phi}^i &= \delta\hat{V}^{i^y}/R \\ \delta\dot{\lambda}^i &= \delta\hat{V}^{i^x}\sec\varphi/R \end{aligned} \right\} \quad (6-3-44)$$

三、误差方程分析

由以上推导, 在静基座条件下, 采用指北方案的捷联式惯性导航系统的误差方程组可以表示成如下形式:

$$\delta\dot{\lambda}^i = \delta\hat{V}^{i^x}\sec\varphi/R \quad (6-3-45)$$

$$\begin{bmatrix} \delta\hat{V}^{i^x} \\ \delta\hat{V}^{i^y} \\ \delta\phi^i \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_{i_e}\sin\varphi & 0 & 0 & g & 0 \\ -2\omega_{i_e}\sin\varphi & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 0 & \omega_{i_e}\sin\varphi & -\omega_{i_e}\cos\varphi \\ 1/R & 0 & -\omega_{i_e}\sin\varphi & -\omega_{i_e}\sin\varphi & 0 & 0 \\ \text{tg}\varphi/R & 0 & \omega_{i_e}\cos\varphi & \omega_{i_e}\cos\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{V}^{i^x} \\ \delta\hat{V}^{i^y} \\ \delta\phi^i \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \nabla\hat{i}^x \\ \nabla\hat{i}^y \\ 0 \\ \varepsilon\hat{i}^x \\ \varepsilon\hat{i}^y \\ \varepsilon\hat{i}^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_d^{\hat{i}^x} \\ a_d^{\hat{i}^y} \\ 0 \\ \omega_d^{\hat{i}^x} \\ \omega_d^{\hat{i}^y} \\ \omega_d^{\hat{i}^z} \end{bmatrix} \quad (6-3-46)$$

其中一阶小量的上标全部写成 \hat{i} , 这是由于一阶小量在 i 系或 \hat{i} 系中投影略去二阶小量后相等所致, 因此对于一阶小量时上标 \hat{i} 和 i 可以互换。

根据以上方程组, 我们可以画出采用指北方案的捷联式惯性导航系统的误差方块图如图 6-3-2 所示。

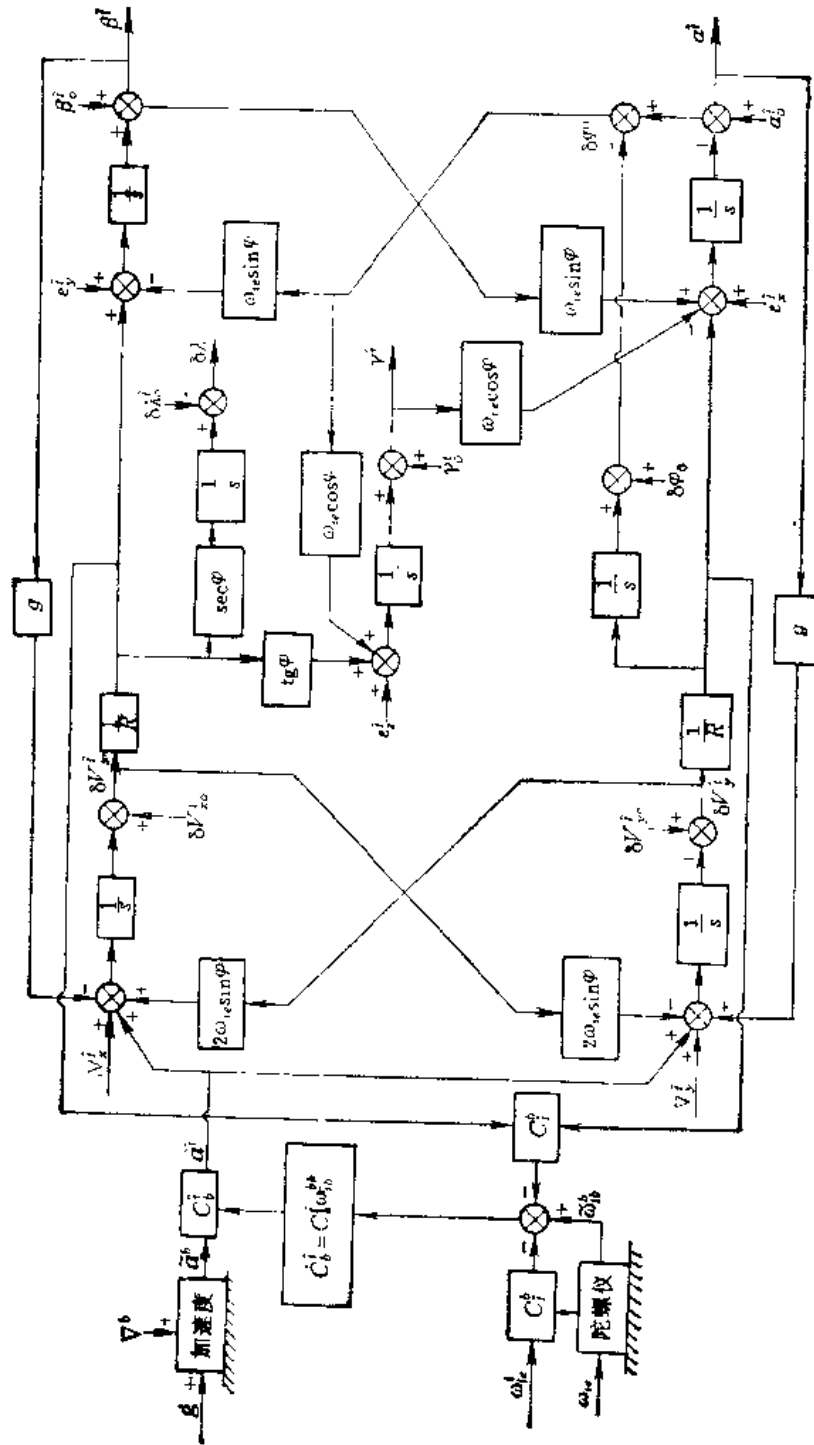


图6-3-2 静基座下采用指北方案的捷联式惯性导航系统的误差方块图

四、无阻尼捷联式惯性导航系统误差的传播特性及其分析

从上面的推导结果得知，在静基座条件下，捷联式惯性导航系统的误差方程与平台式惯性导航系统是完全一致的，因此捷联系统中的数学解析平台和平台系统中的常平架稳定平台具有完全相似的物理本质。

我们将式(6-3-46)写成简单的形式为：

$$\dot{X} = AX + W \quad (6-3-47)$$

对上式进行拉氏变换有，

$$sX(s) = AX(s) + X_0(s) + W(s) \quad (6-3-48)$$

其中， X_0 为初始条件列阵，显然经简单变换后可得：

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI + A)^{-1} [W(s) + X_0(s)] \\ &= \frac{N(s)}{\Delta(s)} [W(s) + X_0(s)] \end{aligned} \quad (6-3-49)$$

这里，系统的特征式为：

$$\Delta(s) = |sI - A| \quad (6-3-50)$$

$N(s)$ 是特征矩阵 $(sI - A)$ 的伴随矩阵。

令 $g/R = \omega_i^2$

由矩阵理论可求得式(6-3-48)的特征根为：

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \pm i(\omega_e + \omega_{ie} \sin\varphi) \\ s_{3,4} &= \pm i(\omega_e - \omega_{ie} \sin\varphi) \end{aligned}$$

从特征根中可以得知，捷联系统同稳定平台系统一样，系统均为自由振荡系统，系统误差存在三种振荡周期：地球周期 $T_e = 24\text{h}$ ；舒拉周期 $T_s = 84.4\text{min}$ ；傅科周期 $T_F = 2\pi/\omega_{ie} \sin\varphi$ ，显然傅科周期是与纬度有关的。

由于我们现在研究的系统是在静基座条件下的误差方程，且 ω_{ie} 、 φ 、 R 、 g 均为常值，这样式(6-3-48)即为线性定常微分方程组，所以可以用拉氏变换的方法求出它的解。令

$$C = (sI - A)^{-1} \quad (6-3-51)$$

这样我们可以求得矩阵 C 的元素分别为：

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{s}{s^2 + \omega_e^2} \\ C_{12} &= 0 \\ C_{13} &= \frac{g\Omega \sin\varphi \cdot s}{(s^2 + \omega_e^2)(s^2 + \Omega^2)} \\ C_{14} &= \frac{g\Omega \sin\varphi \cdot s}{(s^2 + \omega_e^2)(s^2 + \Omega^2)} \\ C_{15} &= -\frac{g(s^2 + \Omega^2 \cos^2\varphi)}{(s^2 + \omega_e^2)(s^2 + \Omega^2)} \\ C_{16} &= -\frac{g\Omega^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(s^2 + \omega_e^2)(s^2 + \Omega^2)} \end{aligned}$$

$$C_{21} = 0$$

$$C_{22} = \frac{s}{s^2 + \omega_i^2}$$

$$C_{23} = -\frac{g\Omega^2}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{24} = \frac{gs^2}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{25} = \frac{g\Omega \sin \varphi \cdot s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{26} = -\frac{g\Omega \cos \varphi \cdot s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{31} = 0$$

$$C_{32} = \frac{1}{R(s^2 + \omega_i^2)}$$

$$C_{33} = \frac{(s^2 + \omega_i^2 + \Omega^2) s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{34} = \frac{\omega_i^2 s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{35} = \frac{\omega_i^2 \Omega \sin \varphi}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{36} = -\frac{\omega_i^2 \Omega \cos \varphi}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{41} = 0$$

$$C_{42} = -\frac{1}{R(s^2 + \omega_i^2)}$$

$$C_{43} = -\frac{\Omega^2 \cdot s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{44} = \frac{s^2}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{45} = \frac{\Omega \sin \varphi \cdot s^2}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{46} = -\frac{\Omega \cos \varphi \cdot s^2}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{51} = \frac{1}{R(s^2 + \omega_i^2)}$$

$$C_{52} = 0$$

$$C_{53} = -\frac{\Omega \sin \varphi \cdot s^2}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{54} = -\frac{\Omega \sin \varphi \cdot s^2}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{55} = \frac{(s^2 + \Omega^2 \cos^2 \varphi) s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{56} = \frac{\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{e1} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{R(s^2 + \omega_i^2)}$$

$$C_{e2} = 0$$

$$C_{e3} = \frac{\Omega(s^2 \cos\varphi + \omega_i^2 \sec\varphi)}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{e4} = \frac{\Omega(s^2 \cos\varphi + \omega_i^2 \sec\varphi)}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{e5} = \frac{(\Omega^2 \sin\varphi \cos\varphi - \omega_i^2 \operatorname{tg}\varphi) s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$C_{e6} = \frac{(s^2 + \omega_i^2 + \Omega^2 \sin^2\varphi) s}{(s^2 + \omega_i^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

利用上述式子，按式 (6-3-49) 即可求出系统的误差特性。
经度误差可由下式求得 (考虑 δV^x 的初值为零)，

$$\delta\lambda(s) = -\frac{\sec\varphi}{Rs} \delta V^x(s) \quad (6-3-52)$$

虽然，在静基座条件下，常值陀螺漂移、加速度计零位误差以及初始对准误差引起的系统误差，可通过上面讨论的式子进行理论分析，但由于这种分析方法较烦琐，一般是在计算机上通过数值解法求解式 (6-3-45) 与式 (6-3-46) 来进行系统的误差分析的。

五、捷联系统的计算机模拟与分析

对于式 (6-3-45) 与式 (6-3-46) 所示的一阶微分方程组可以用龙格库塔法，求出其数值解，并绘出其误差曲线。图 6-3-3~图 6-3-7 分别绘出了不同误差源的系统误差仿真曲线。从误差曲线，可以看以下几种情况。

1. 常值陀螺漂移所引起的导航误差及姿态误差

若认为系统误差源仅有常值陀螺漂移，则在静基座条件下，求出的东向陀螺、北向陀螺和方位陀螺常值漂移所引起的系统误差，分别如图 6-3-3、图 6-3-4、图 6-3-5 所示。

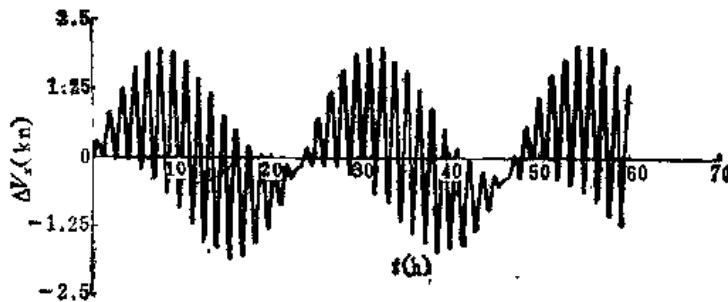


图6-3-3 (a)

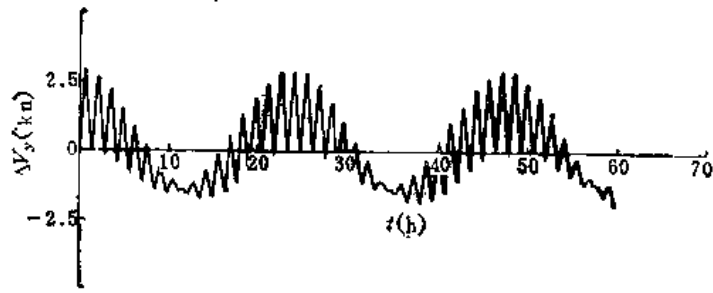


图6-3-3 (b)

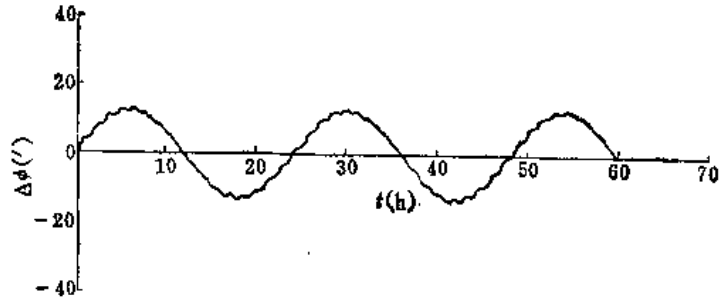


图6-3-3 (c)

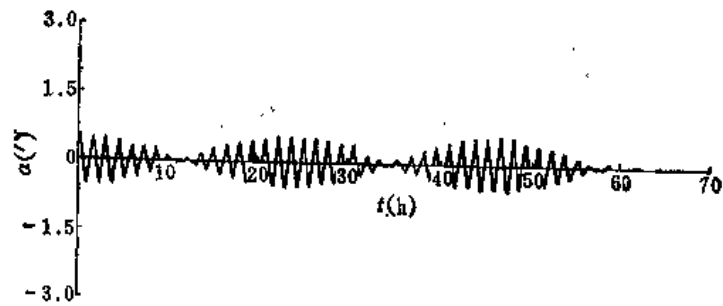


图6-3-3 (d)

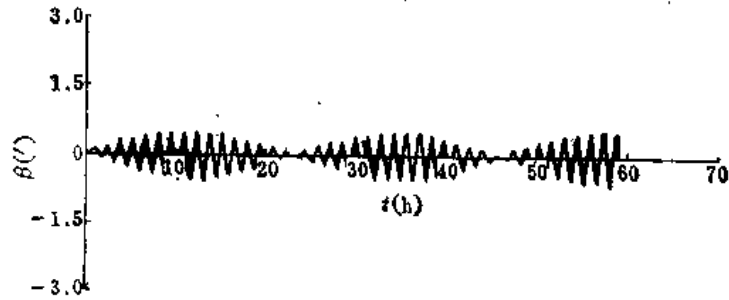


图6-3-3 (e)

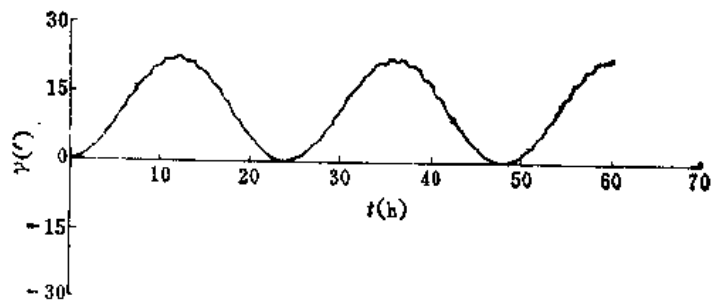


图6-3-3 (f)

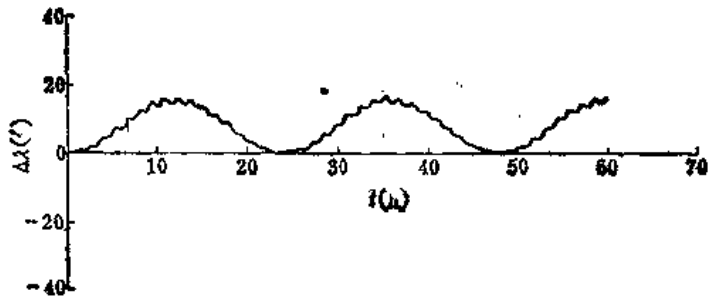


图6-3-3 (a)

图6-3-3 东向陀螺常值漂移所引起的系统误差仿真曲线图
($\epsilon_x = 0.05^\circ/h$, 纬度 $\varphi = 45^\circ 45'$)

从图 6-3-3 一组图中可以看出：东向陀螺漂移 ϵ_x 对经度及方位产生常值分量误差，而不引起随时间积累的误差，而对于七个输出导航定位参数均存在三种周期振荡误差。

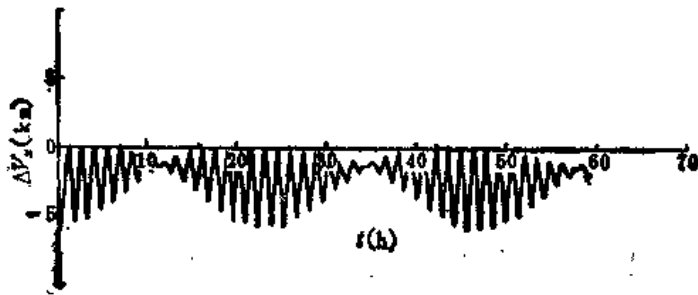


图6-3-4 (a)

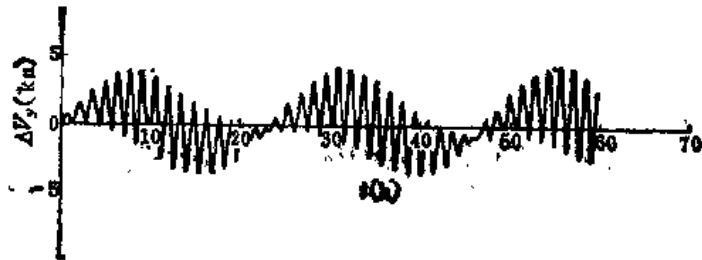


图6-3-4 (b)

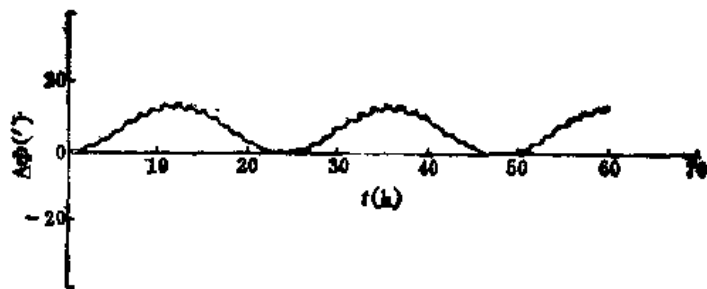


图6-3-4 (c)



图6-3-4 (d)

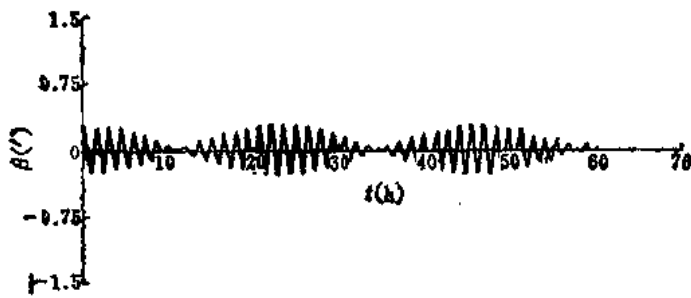


图6-3-4 (e)

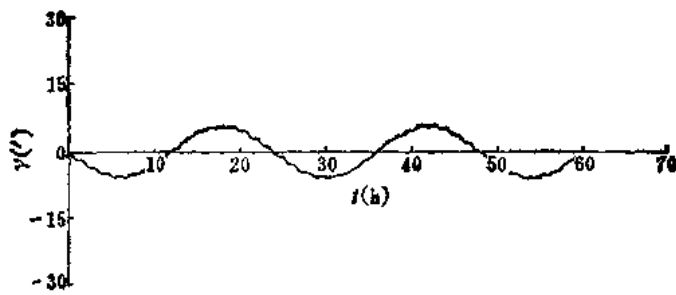


图6-3-4 (f)

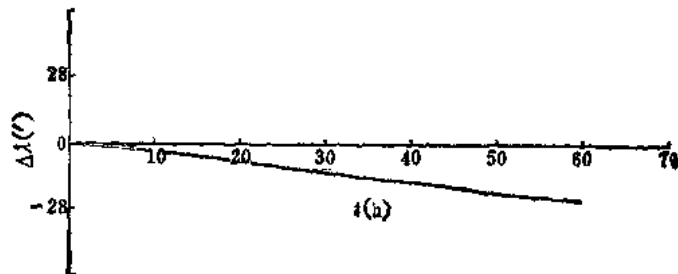


图6-3-4 (g)

图6-3-4 北向陀螺常值漂移所引起的系统误差仿真曲线图
 $(e_p = 0.05^\circ/b, \text{纬度} \varphi = 45^\circ 45')$

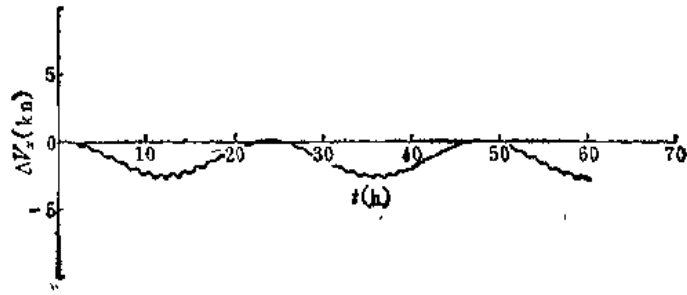


图6-3-5 (a)

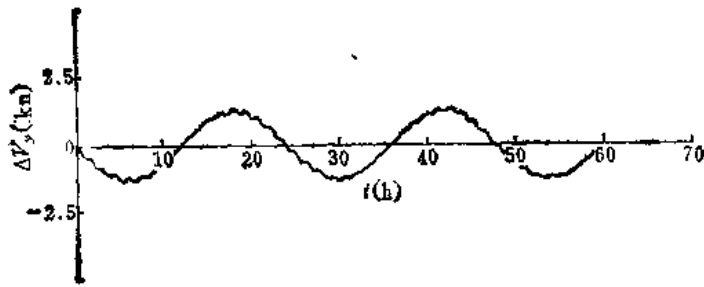


图6-3-5 (b)

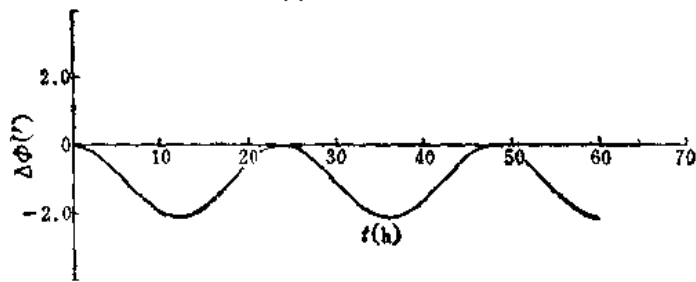


图6-3-5 (c)

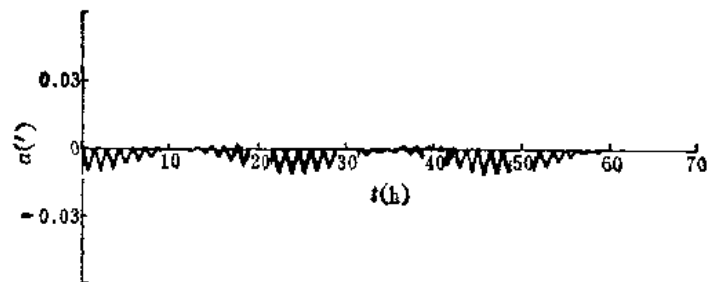


图6-3-5 (d)

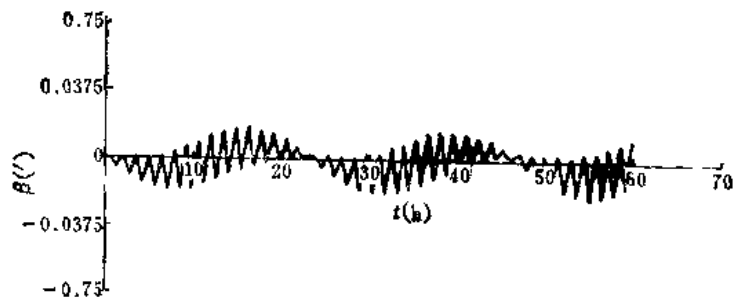


图6-3-5 (e)

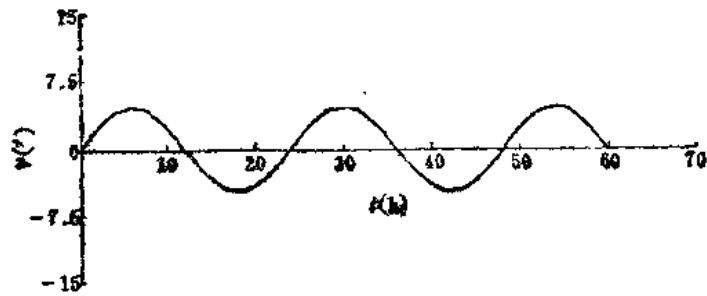


图6-3-5 (f)

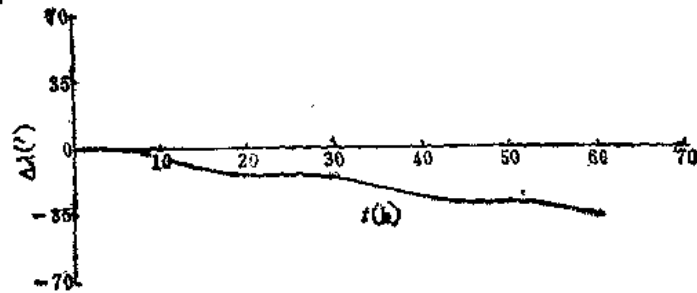


图6-3-5 (g)

图6-3-5 方位陀螺漂移所引起的系统误差仿真曲线图
 $(\epsilon_z = 0.05^\circ/\text{h}, \text{纬度 } \varphi = 45^\circ 45')$

从图6-3-4、图6-3-5两组图示曲线可以得知：北向陀螺常值漂移 ϵ_z 以及方位陀螺常值漂移 ϵ_x 引起的系统误差是相似的。它们不仅产生常值的纬度误差和常值的东向速度误差，还同时产生随时间积累的经度误差，所以说系统的定位误差是发散的。同时 ϵ_y 、 ϵ_x 也对上述七个系统参数都产生三种周期振荡误差。

顺便要说明的是，假如对于动基座，则 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 不是单个陀螺仪的常值漂移值，而是沿载体坐标系固联的三个陀螺仪常值漂移的归化值。

从图中还可以看出，傅科项的效应是以地球速率垂直分量 $\omega_e \sin \varphi$ 为频率对舒拉振荡进行调制的。傅科调制对纬度、经度和方位误差的影响是比较小的，这三个参数的主要振荡形式是按地球速率进行振荡的。但另一方面，傅科调制对姿态误差 α 、 β 、 γ 影响不是很大的。

2. 加速度计零偏所引起的导航误差及姿态误差

当认为系统的误差源仅仅是加速度零偏的话，那么在静基座条件下，用计算机数学仿真求得加速度计零偏所引起的导航及姿态误差如图6-3-6所示。

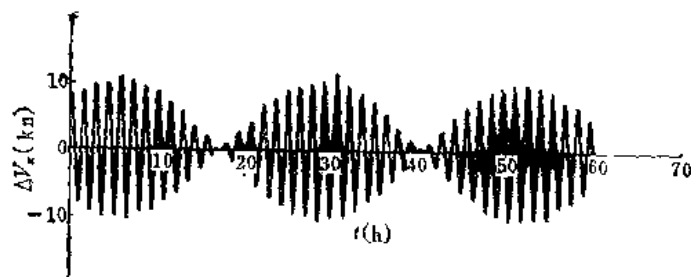


图6-3-6 (a)

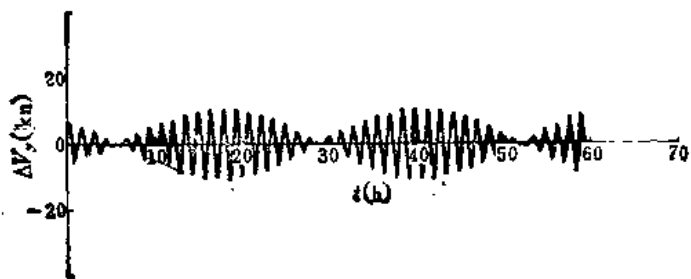


图6-3-6 (b)

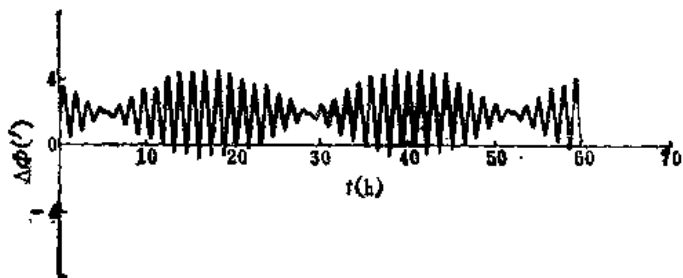


图6-3-6 (c)

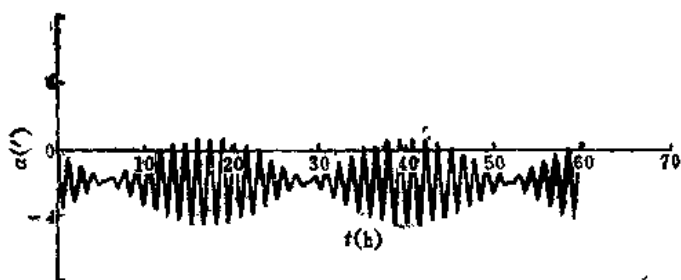


图6-3-6 (d)

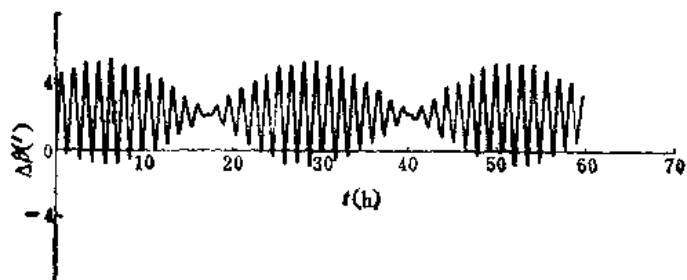


图6-3-6 (e)

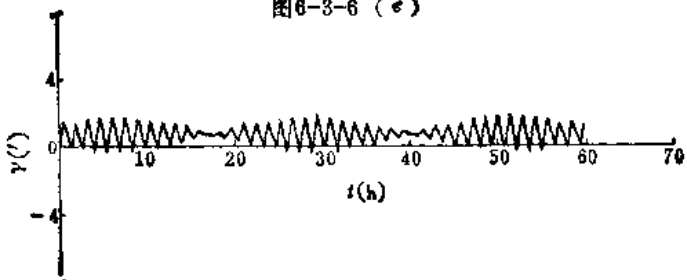


图6-3-6 (f)

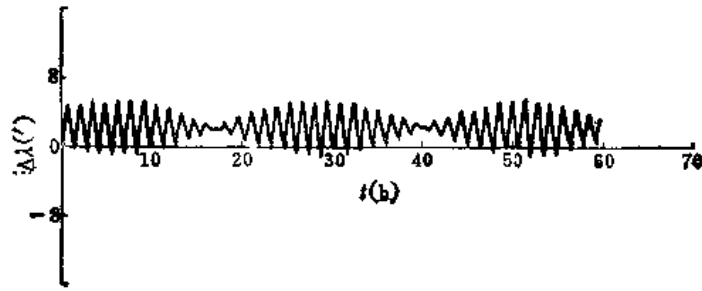


图6-3-6 (g)

图6-3-6 加速度计零偏引起的系统误差仿真曲线图

(零偏 $\nabla_x = \nabla_y = 5 \times 10^{-6} g$ 纬度 $\varphi = 45^\circ 45'$)

从图 6-3-6 中可以看出：由于加速度计的零偏直接激励“高增益”的水平修正回路，所以舒拉振荡是主要的，而傅科周期振荡起了调制舒拉周期振荡的作用。因此也包含有傅科周期振荡，但不包含地球周期振荡项。加速度计零位误差引起位置误差 $\delta\varphi$ 、 $\delta\lambda$ 及姿态误差 α 、 β 、 γ 的常位分量，而不引起速度误差的常值分量。因此系统的水平精度就是由加速度计的精度来确定。

3. 初始误差引起的系统误差

当认为系统的误差源仅仅是初始误差，在静基座条件下可忽略傅科项，所求出的系统误差曲线如图 6-3-7 所示。

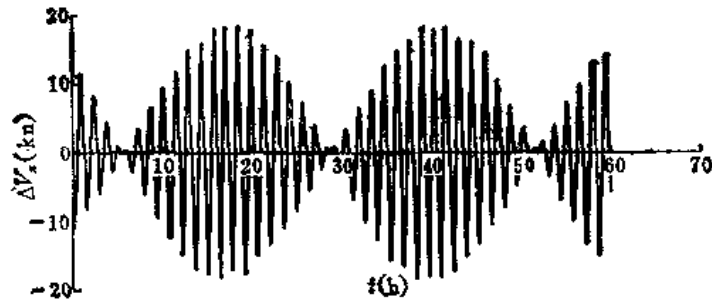


图6-3-7 (a)



图6-3-7 (b)

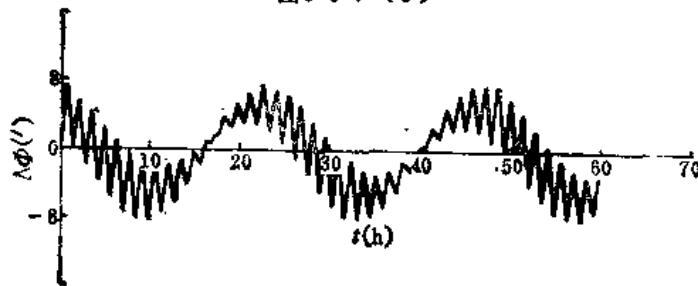


图6-3-7 (c)

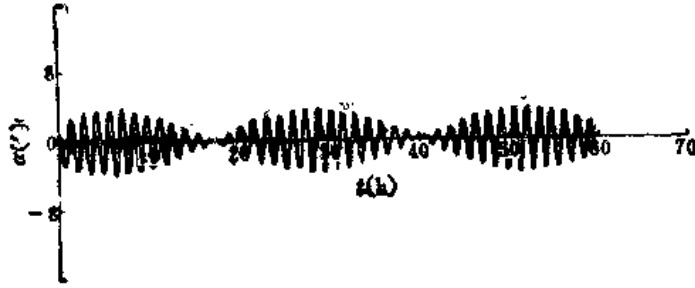


图6-3-7 (d)

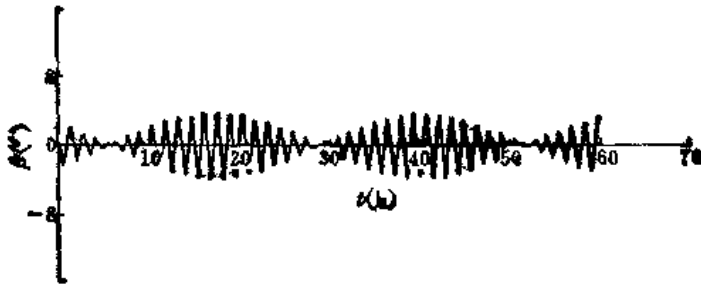


图6-3-7 (e)

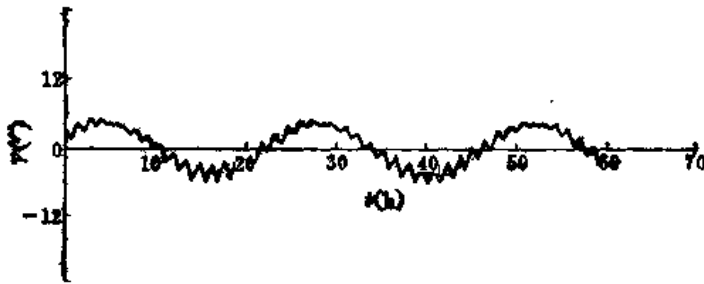


图6-3-7 (f)

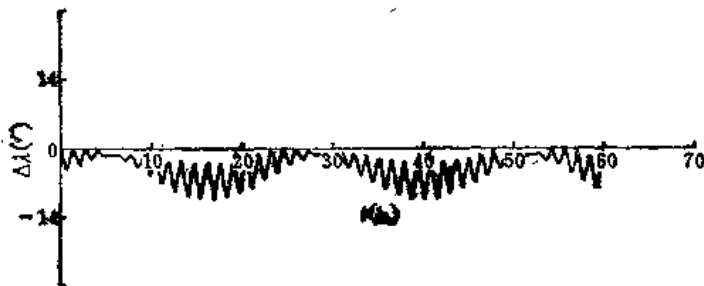


图6-3-7 (g)

图6-3-7 初始条件引起的系统误差仿真曲线图 (初始条件
 $\alpha_0 = \beta_0 = 2'$, $\gamma_0 = 5'$, $\delta\lambda_0 = 2'$, 纬度 $\varphi = 45^\circ 45'$)

从图中可以看到：初始条件引起的系统误差特性除 γ_0 、 β_0 、 $\delta\lambda_0$ 引起常值的经度误差外，其他系统误差都是振荡的。而初始条件引起的振荡误差则包含有舒拉周期和地球周期两种振荡。

由于系统总是同时存在以上各类误差源，所以有必要分析一下，把各类误差源都考虑在内时系统的误差特性，仿真结果如图 6-3-8 所示。

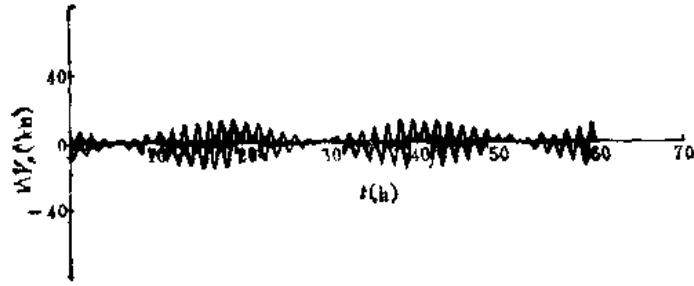


图6-3-8 (a)

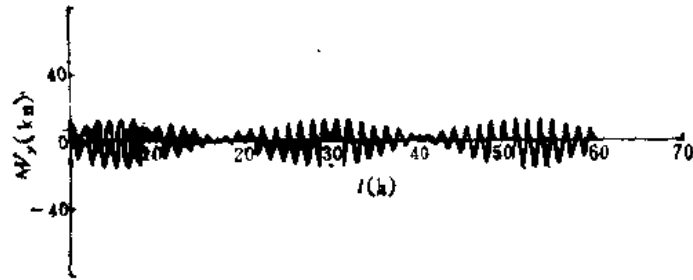


图6-3-8 (b)

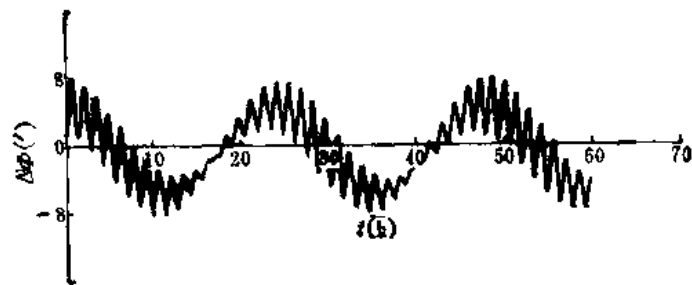


图6-3-8 (c)

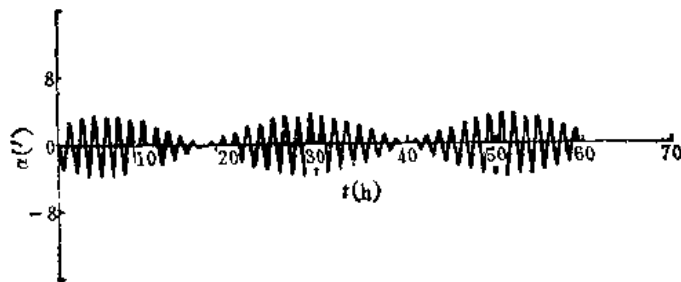


图6-3-8 (d)

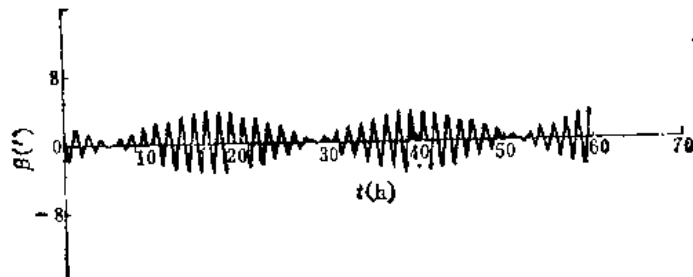


图6-3-8 (e)

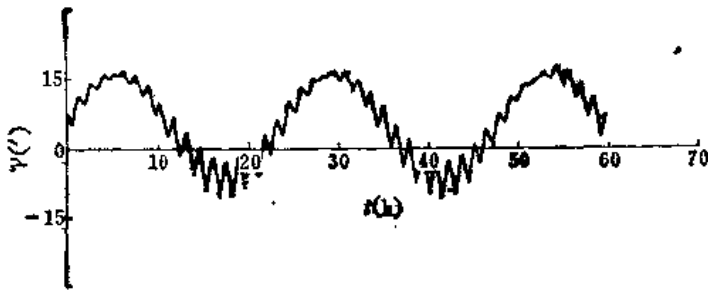


图6-3-8 (f)

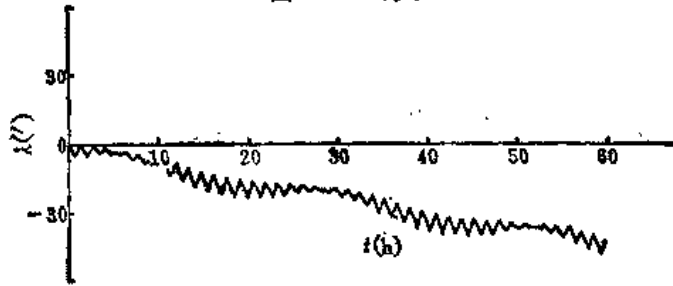


图6-3-8 (g)

图6-3-8 无阻尼系统在下列误差源都存在时的系统误差仿真曲线图
 $(\nabla_x = \nabla_y = 5 \times 10^{-6} \text{ g}, \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0.05^\circ/\text{h}, \alpha_0 = \beta_0 = 3', \gamma_0 = 5',$
 $\delta\varphi_0 = 2', \text{ 纬度 } \varphi = 45^\circ 45')$

从图中可以看出，系统误差较大，特别是方位误差是随时间而积累的，这对于舰船航行时间较长的捷联系统来讲，显然是不利的。

以上分析都是考虑捷联系统工作在静基座的情况下，即舰船停靠在码头。在这种情况下，捷联式惯性导航系统和平台式惯性导航系统具有完全相同的误差特性。但舰船在航行过程中两种系统在性能上会有明显差别。这些差别主要表现在舰船的角运动会产生严重的动态误差。捷联系统中用的陀螺应具有较大的施矩速率，这样会使力矩器的标度系数误差大为增加。另一方面，由于仪表固定在舰船上，因此惯性仪表的误差可以看作是载体相固联的，所以其误差是时间的函数。

§ 6.4 捷联式惯性导航系统的尺寸效应

对于使用捷联式惯性测量组件的舰船或其他水中运动对象而言，其惯性测量组件中的加速度计理想定位应在水中运动对象的摇摆中心。当加速度计偏离该理想位置和运动对象处于摇摆状态时，由于存在离心加速度和切向加速度，会引起加速度计的测量误差。这种现象称为“尺寸效应”。为消除尺寸效应引起的导航误差，必须满足两个条件：第一是惯性测量组件必须安装在舰船的摇摆中心；第二是惯性测量装置的尺寸必须为零，即意味着是一个“点惯性测量装置”。显然第一个条件往往是不切合实际的，而第二个条件实际上是不能实现的。当然，稳定平台式的惯性测量装置也存在着尺寸效应。例如，将单转子摆式陀螺罗经改进成双转子摆式陀螺罗经，就是由舰船摇摆引起的尺寸效应使之指示误差过大所致。

虽然惯性测量装置的尺寸效应是各单个加速度计的尺寸效应的综合,但加速度计尺寸效应的严重性并不能反映相应的惯性测量装置的尺寸效应的严重性,因为人们最终关心的是导航误差。所以说,从惯性测量装置系统的观点来考虑尺寸效应是比较合适的。

为了研究捷联式惯性导航的尺寸效应,应先做三个假设:首先假定计算是理想的,它意味着没有软件带来的误差;其次假定惯性测量组件是由 A_x 、 A_y 、 A_z 三个加速度计构成一个正交的三元加速度计组合体,最后假定舰船的位置将以其摇摆中心的位置来决定。

一、尺寸效应误差分析

一个加速度计的尺寸效应误差可由图 6-4-1 表示的两个坐标系的分析而得到。

从图 6-4-1 表示的固定坐标系 $OXYZ$ 和动坐标系 $Ox_b Y_b Z_b$ 得知,点 P 是动坐标系中一个固定点,其位置矢量表示成: R_0 、 R_p 、 r_p , 动坐标系相对定坐标系的角速度以 ω 表示,应用矢量分析可得到点 P 相对固定坐标系的加速度表达式为:

$$a_p = \frac{d^2 R_0}{dt^2} + a_m + 2\omega \times V_m + \omega \times r_p + \omega \times \omega \times r_p \quad (6-4-1)$$

其中下标 m 表示相对于动坐标, V 代表速度。

对于捷联式惯性测量装置,定坐标系 $OXYZ$ 的原点 O 是惯性空间的固定点,而原点 O_b 是舰船的摇摆中心,点 P 是惯性测量组件中 A 加速度计的定位点, ω 是舰船的角速度。因为加速度计是直接安装在载体上,所以 a_m 、 V_m 等于零。沿加速度计的输入轴上的加速度等于方程 (6-4-1) 和沿加速度计的输入轴的单位矢量 U , 的点乘积。

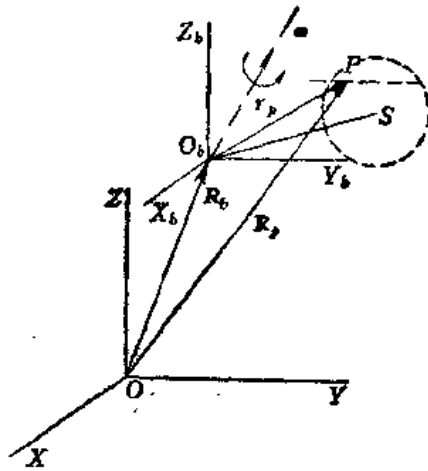


图6-4-1 尺寸效应的几何分析图

$$a_{ip} = a_p \cdot U, \quad (p = x, y, z) \quad (6-4-2)$$

若没有尺寸效应,则 r_p 是零,所以由加速度计敏感出的加速度是:

$$a_{ip} = \frac{d^2 R_0}{dt^2} \cdot U, \quad (p = x, y, z) \quad (6-4-3)$$

但由于 $r_p \neq 0$, 而存在尺寸效应,则加速度计的输出误差是:

$$\varepsilon_p = (\omega \times r_p + \omega \times \omega \times r_p) \cdot U, \quad (p = x, y, z) \quad (6-4-4)$$

方程 (6-4-4) 的第一项表示切向加速度的影响,第二项表示向心加速度的影响。方程 (6-4-4) 表明了每个加速度计的尺寸效应误差正比于加速度计和舰船摇摆轴之间的距离。

二、惯性测量组件尺寸效应的两种类型

根据方程 (6-4-4), 从 x 、 y 、 z 分量可得到惯性测量组件的尺寸效应误差为:

$$\varepsilon = \sum [(\omega \times r_p + \omega \times \omega \times r_p)U_p]U_p \quad (p = x, y, z) \quad (6-4-5)$$

而对于每个加速度计的位置矢量 r_p 能分解为两个分量 r 和 d_p , 如图 6-4-2 所示。 r 是动坐标系上的加速度计组件的中心 S 点的位置矢量; d_p 分量是加速度计 A_i 相对于加速度计组件中心的位置矢量, 因此有:

$$r_p = r + d_p \quad (p = x, y, z) \quad (6-4-6)$$

将式 (6-4-6) 代入式 (6-4-4), 并将结果分为两部分, 一部分包含 r 另一部分包括 d_p , 于是有:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum [(\omega \times r + \omega \times \omega \times r)U_p]U_p + \sum [(\omega \times d_p + \omega \times \omega \times d_p)U_p]U_p \\ &= \varepsilon_m + \varepsilon_s \quad (p = x, y, z) \end{aligned} \quad (6-4-7)$$

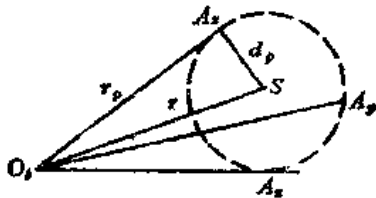


图6-4-2 加速度计组件的安装偏离效应

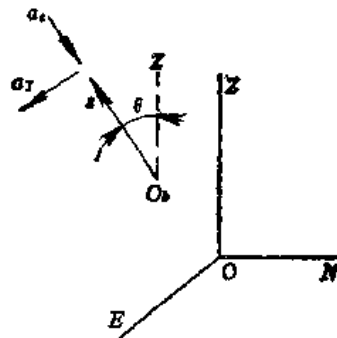


图6-4-3 加速度分量

方程 (6-4-7) 的第一项是由于 r 不等于零引起的, 该效应称为“惯性测量组件的安装偏差尺寸效应”, 并以 ε_m 表示; 方程 (6-4-7) 中第二项是由于 d_p 不等于零引起的, 该效应称为“加速度计组的尺寸效应”, 以 ε_s 表示。

对于惯性测量装置的安装尺寸效应, 只要舰船的摇摆中心与惯性测量组件之间存在安装偏差, 那么由于安装偏离引起的尺寸效应对于捷联式和稳定平台式的惯性测量组件是一样的。当舰船有角运动的情况下, 就会有 S 点相对 O_s 点的加速度, 可以设想 S 点是“点惯性测量组件的位置”, 其实际尺寸为零。由于安装偏差尺寸效应引起的加速度误差由方程 (6-4-7) 中第一部分给出, 很清楚, 实际上最大的导航误差是 $2r$, 即为 S 点和 O_s 点之间距离的两倍。下面来进一步说明之。

考虑图 6-4-3 所示的状态, 其固定坐标系为 ENZ , S 点的角运动是平行于 EZ 平面, 其向心加速度和切向加速度是:

$$\left. \begin{aligned} a_c &= r\dot{\theta}^2 \\ a_r &= r\ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (6-4-8)$$

沿固定坐标系的分量是:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= a_c \sin\theta + a_r \cos\theta \\ a_Z &= a_c \cos\theta - a_r \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (6-4-9)$$

令 $\omega_k = \dot{\theta} = \text{常数}$, 那么 $\dot{\theta} = 0$, 则 (6-4-8) 中, 将 $a_c = r\omega_k^2$, $a_z = 0$ 代入式 (6-4-9) 得:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= r\omega_k^2 \sin\omega_k t \\ a_z &= r\omega_k^2 \cos\omega_k t \end{aligned} \right\} \quad (6-4-10)$$

对方程 (6-4-10) 进行两次积分, 得距离:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= r \sin\omega_k t \\ D_z &= r \cos\omega_k t \end{aligned} \right\} \quad (6-4-11)$$

在时间 t 与初始时间 t_0 之间的距离变化值为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_x &= r (\sin\omega_k t - \sin\omega_k t_0) \\ \Delta D_z &= r (\cos\omega_k t - \cos\omega_k t_0) \end{aligned} \right\} \quad (6-4-12)$$

合成距离的变化值为:

$$\Delta D = \sqrt{\Delta D_x^2 + \Delta D_z^2} = r \sqrt{2 - 2\cos(\omega_k t - \omega_k t_0)} \quad (6-4-13)$$

其中 $\Delta D_{\max} = 2r$ 。

通常, r 的大小与所需的惯性导航精度相比是非常小的, 因此安装偏离的尺寸效应在误差估算中给以忽略。

应当指出, 假定舰船的位置定义为惯性测量组件的中心位置, 那么安装偏离尺寸效应就不存在了。

三、尺寸效应的补偿

惯性测量组件的尺寸效应可以利用陀螺仪测得的有效舰船角速率信息进行补偿。对于任何惯性测量组件中的每一个加速度计的位置矢量 d_p 是已知的, 对于舰船来讲它的摇摆中心也是固定的, 也就是说惯性测量装置的位置矢量 r 是已知的。这样 $r_p = r + d_p$ 均为已知。此时可以利用测得的角速率由方程 (6-4-4) 求得加速度输出的尺寸效应补偿量。

其补偿的算法为:

$$a_{pc} = a_p - \varepsilon_p \quad (p = x, y, z) \quad (6-4-14)$$

式中 a_{pc} ——补偿后的加速度;

a_p ——敏感加速度;

ε_p ——按式 (6-4-4) 计算得到的补偿量。图 6-4-4 给出了尺寸效应补偿图。

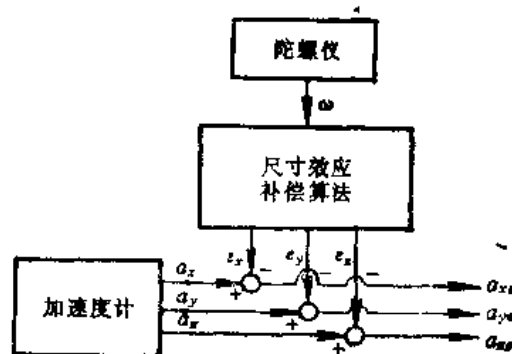


图6-4-4 尺寸效应补偿图

应当强调的是理想的计算并不会消除尺寸效应,这是因为理想的计算意味着数据的采样速率是无限的。在捷联式系统中算法过程没有截断误差,计算机没有舍入误差,无限的计算频率,且没有计算延时。但由于惯性测量组件中的传感器如陀螺仪及加速度计在舰船动态环境中的高频部分常常会暴露出严重的尺寸效应。这时当对惯性测量组件输出数据的采样频率和计算频率不是足够高的话,将会导致严重的交链影响,即惯性测量组件的尺寸效应又会引起新的计算误差。

通过上面的介绍,我们发现在捷联式惯性测量组件中的尺寸效应通常是不能忽略的。对于一定精度的惯性导航系统,应对在其误差估算中考虑其尺寸效应的影响。原则上讲,惯性测量组件的尺寸效应能从陀螺仪获取的有用角速率信息给以补偿。而对于稳定平台式惯性测量组件中的加速度计,则不受舰船的角速率的影响,所以它的组件尺寸效应是很小的。

参 考 文 献

- 1 陈哲.捷联惯导系统原理.北京:宇航出版社,1986.
- 2 袁信,郑涛.捷联式惯性导航原理.南京:航空专业教材编审组,1985.
- 3 黄德鸣,程禄.惯性导航系统.北京:国防工业出版社,1986.
- 4 黄德鸣,张树侠,孙枫.平台罗经.北京:国防工业出版社,1990.
- 5 高远.信号数字处理技术及其应用.哈尔滨:黑龙江科学技术出版社,1983.
- 6 GJB 535—88惯性技术术语.北京:国防科工委军标出版发行部,1989.
- 7 (美) 富兰克林 G. F., 德威尔 J. D. 动态系统的数字控制.张洪银,汪一影,严智民译.北京:新时代出版社,1988.
- 8 (苏) 库索夫可夫 H. Γ. 控制系统的最优滤波和辨识方法.章燕申译.北京:国防工业出版社,1984.
- 9 (美) 洪 J. C. 编.捷联式导航平台.汪开远译.北京:科学出版社,1979.
- 10 Slater J. M. Inertial Navigation Analysis and Design. 1964
- 11 郑涛.捷联惯导系统陀螺罗经对准性能之协方差分析.西北工业大学学报,1988,(1),119~126
- 12 Zhang Sauxia, Sun Jing. Experimental Research on a Strap-Down Inertial Navigation Device Working Underwater Presented at the International KIS. Sep. 1990, Banff, Canada
- 13 Peng Yun Xiang, Xie Tianhuai. Experimental Investigation on strapdown Inertial System. First International Symposium On Inertial Technology in Beijing, May, 1989.
- 14 Peng Yun Xiang, Xie Tianhuai. A Study and Design of strapdown Algorithms. First International Symposium On Inertial Technology in Beijing, May, 1989.
- 15 Minoru Shibata. Error Analysis Strapdown Inertial Navigation using Quaternions. Engineering Notes May-June 1986.
- 16 LSR—85 Strap-down Gyrocompass and Vertical Reference System Technical Proposal
- 17 (英) Mortenson R. E. 捷联制导误差分析.滕人忠译.国外惯性导与器1981(3),1~8
- 18 (英) Giovanni C SAN, Levinson E. 环形激光(器)捷联式航海陀螺罗经的性能.王志明译.国外惯导与器件.1985(1),59~73
- 19 (英) Dieter K. 捷联系统中陀螺误差的实时补偿.胡扣霖译.国外惯导与器件.1985(2),34~48
- 20 (日) 新宫博公.惯性导航中冗余传感器系统.王存思译.国外惯导与器件.1982(2),29~46
- 21 Hung J. C. 捷联式惯性导航的尺寸效应.张仁祺译.国外惯导与器件1982(4),33~40